

Periodische lineare diskrete Systeme und ihre Normalform

von

Tobias Metzloff

Bachelorarbeit im Studiengang Mathematik B.Sc.

vorgelegt der

Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften der
Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen

im Oktober 2017

Prof. Dr. Eva Zerz

Dr. Viktor Levandovskyy

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Erreichbarkeit	3
3	Vertretersystem für Ähnlichkeitstransformationen	15
4	Kalman-Einbettung	20
5	Normalform für erreichbare Systeme unter Ähnlichkeit	27
6	Ausblick und Fazit	36
	Literatur	38

1 Einleitung

Die vorliegende Bachelorarbeit ist eine Ausarbeitung des Artikels *Structure and parametrization of periodic linear systems* von Uwe Helmke und Erik I. Verriest über grundlegende Struktureigenschaften periodischer, zeitlich diskreter Input-Systeme und Feedback-Kontrollsysteme. Solche Systeme finden bei der Modellierung periodischer Prozesse Anwendung. Der Artikel wurde 1996 zum ersten Mal unter dem selben Namen veröffentlicht und 2011 überarbeitet.

Uwe Helmke war Professor für Mathematik an der Julius-Maximilians-Universität in Würzburg und hat in verschiedenen Bereichen der Kontrolltheorie gewirkt. Unter anderem verfasste er in Zusammenarbeit mit John B. Moore das Werk *Optimization and Dynamical Systems* (siehe [6]).

Erik I. Verriest ist Professor an der Georgia Tech School of Electrical and Computer Engineering und befasst sich neben Telekommunikation und Bioengineering ebenfalls mit mathematischen Systemen und Kontrolltheorie (siehe [7]).

In ihrem Artikel untersuchen die Autoren Systeme der Form

$$x_{k+1} = A_k \cdot x_k + B_k \cdot u_k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

mit periodischen Matrizen A_k und B_k . Dies erfordert eine angepasste Definition des klassischen Erreichbarkeitsbegriffs aus [2], die wir in Kapitel 2 formulieren und untersuchen werden. Die Transformation des Zustandsraums solcher Systeme führt auf Probleme wie Invarianz, geometrische Darstellung und dem Aufstellen von Normalformen. In Kapitel 3 werden wir den Begriff der Transformation formalisieren und in Kapitel 4 geometrische Aspekte festhalten. In Kapitel [5] wird zum Abschluss die Normalform für erreichbare Systeme als Invariante definiert.

Die grundlegende Idee besteht darin, das System in der obigen Gestalt mit zeitinvarianten Systemen zu assoziieren. Für den Beweis der Hauptresultate dieser Arbeit ist dies von großem Nutzen. Unter Anderem werden wir eine Kalman-Zerlegung für N -periodische Systeme einführen, zeigen dass Transformationen des Zustandsraums eine freie Gruppenoperation mit einer Untermannigfaltigkeit als Graph sind, und einen Satz über die allgemeine Kalman-Einbettung beweisen, die die Vertreter periodischer Systeme mit Elementen einer Grassmann-Mannigfaltigkeit identifiziert. Des Weiteren werden wir eine Normalform erreichbarer Systeme unter Ähnlichkeitstransformationen für den Single-Input-Case (siehe [2]) aufstellen.

Notationen

\mathbb{N} ist die Menge der natürlichen Zahlen, beginnend bei 1.

\mathbb{N}_0 ist die Menge der natürlichen Zahlen, beginnend bei 0.

Für eine Liste oder Menge M ist $|M|$ die Kardinalität beziehungsweise Anzahl der Einträge von M .

Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\underline{n} := \{0, \dots, n-1\}$ und $\bar{n} := \{1, \dots, n\}$.

Für $n, i \in \mathbb{N}$ ist $e_i \in \mathbb{N}_0^n$ der i -te Standardbasisvektor und $E_n \in \mathbb{N}_0^{n \times n}$ die Einheitsmatrix.

Für einen Körper \mathbb{K} und eine natürliche Zahl n ist $\text{Gl}_n(\mathbb{K})$ die Gruppe der invertierbaren $n \times n$ Matrizen.

Für eine Menge M ist $\mathfrak{P}(M)$ die Potenzmenge von M .

2 Erreichbarkeit

In diesem Kapitel werden wir grundlegende Eigenschaften periodischer Systeme untersuchen. Insbesondere geht es um Kriterien für Erreichbarkeit. Hierzu führen wir zeitinvariante Systeme ein und erhalten letztendlich eine Erweiterung der bekannten Kalman-Zerlegung.

Ein zeitlich diskretes, N -periodisches, dynamisches System über einem beliebigen Körper \mathbb{K} ist gegeben durch

$$x_{k+1} = A_k \cdot x_k + B_k \cdot u_k.$$

Hierbei bezeichnet man

- mit $k \in \mathbb{Z}$ die Phase des Systems,
- mit $x_k \in \mathbb{K}^{n_k}$ den Systemzustand,
- mit $x_{k+1} \in \mathbb{K}^{n_{k+1}}$ das Ausgangssignal bzw. den Output und
- mit $u_k \in \mathbb{K}^{m_k}$ das frei wählbare Eingangssignal bzw. den Input.

Des Weiteren sind die Matrizen

$$A_k \in \mathbb{K}^{n_{k+1} \times n_k} \text{ und } B_k \in \mathbb{K}^{n_{k+1} \times m_k}$$

N -periodisch mit $A_{j+i \cdot N} := A_j$ und $B_{j+i \cdot N} := B_j$ für $j \in \overline{N}$ und $i \in \mathbb{Z}$.

Das periodische System ist also vollständig durch diese Matrizen beschrieben und wird daher auch mit

$$(A_k, B_k)_N := \left((A_1, B_1), \dots, (A_N, B_N) \right)$$

abgekürzt.

Die Eigenschaft solcher Systeme, an der man in der Kontrolltheorie zunächst interessiert ist, ist die Erreichbarkeit oder Steuerbarkeit. Diese Eigenschaft stellt die Möglichkeit dar, jeden Systemzustand durch frei wählbare Eingangssignale nach Belieben zu verändern und jedes gewünschte Ausgangssignal zu generieren.

Ein Ausgangssignal x_{j+1} und ein Zustand x_i mit $i \leq j$ können durch die Systemmatrizen folgendermaßen verknüpft werden:

$$\begin{aligned} x_{j+1} &= A_j \cdot x_j + B_j \cdot u_j \\ &= A_j \cdot (A_{j-1} \cdot x_{j-1} + B_{j-1} \cdot u_{j-1}) + B_j \cdot u_j \\ &= \dots \\ &= A_j \cdot \dots \cdot A_i \cdot x_i + \left(B_j | A_j \cdot B_{j-1} | \dots | A_j \cdot \dots \cdot A_{i+1} \cdot B_i \right) \cdot \left(u_j^T | \dots | u_i^T \right)^T \end{aligned} \tag{1}$$

Wir sagen auch „ x_i ist nach x_{j+1} steuerbar“ beziehungsweise „ x_{j+1} ist von x_i aus erreichbar“.

Definition 1. *Erreichbarkeit*

1. Sei $j \in \mathbb{Z}$. Das periodische System heißt „zur Phase j erreichbar“, wenn ein $i \leq j$ existiert, sodass jedes Ausgangssignal $x_{j+1} \in \mathbb{K}^{n_{j+1}}$ von jedem ursprünglichen Zustand $x_i \in \mathbb{K}^{n_i}$ durch geeignete Eingangssignale u_j, \dots, u_i erreicht werden kann.
2. Das System heißt „erreichbar“, wenn es zu jeder Phase erreichbar ist.

Die zusammengesetzten Matrizen, welche in der obigen Rechnung (1) auftreten sind im Folgenden sehr nützlich für Untersuchungen der Erreichbarkeit, Zeitinvarianz und Transformationen. Daher definieren wir für $i \leq j \in \mathbb{Z}$

$$A^{[j+1, i]} := A_j \cdot \dots \cdot A_i$$

und

$$R_{[j, i]} := \left(B_j | A_j \cdot B_{j-1} | \dots | A_j \cdot \dots \cdot A_{i+1} \cdot B_i \right).$$

Die Matrix

$$R_j^\infty := \left(B_j | A_j \cdot B_{j-1} | \dots | A_j \cdot \dots \cdot A_{j-N+2} \cdot B_{j-N+1} | \dots \right)$$

mit unendlich vielen Spalten heißt j -te „Erreichbarkeitsmatrix“ oder „Kalman-Matrix“ des Systems. Betrachtet man nur die ersten, endlich vielen $|j - i| + 1$ Blöcke dieser Matrix, so ergibt sich gerade die Matrix $R_{[j, i]}$.

Wir halten hilfreiche Rechenregeln für diese Definitionen fest.

Bemerkung 2. Sei $i \leq j$. Dann gilt

- für die Produkte der A -Matrizen

$$\begin{aligned} A^{[j+N, i]} &= A_{j+N-1} \cdot \dots \cdot A_j \cdot A_{j-1} \cdot \dots \cdot A_i \\ &= A^{[j+N, j]} \cdot A^{[j, i]} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} A^{[j, i-N]} &= A_{j-1} \cdot \dots \cdot A_i \cdot A_{i-1} \cdot \dots \cdot A_{i-N} \\ &= A^{[j, i]} \cdot A^{[i, i-N]}, \end{aligned}$$

- sowie für die R -Matrizen

$$\begin{aligned} R_{[j+N, i]} &= \left(B_{j+N} | \dots | A_{j+N} \cdot \dots \cdot A_{j+2} \cdot B_{j+1} \left| A_{j+N} \cdot \dots \cdot A_{j+1} \cdot B_j \right| \dots | A_{j+N} \cdot \dots \cdot A_{i+1} \cdot B_i \right) \\ &= \left(R_{[j+N, j+1]}, A^{[j+N+1, j+1]} \cdot R_{[j, i]} \right), \end{aligned}$$

und unter der Voraussetzung $i \leq k \leq j$

$$R_{[j, i]} = \left(R_{[j, k+1]}, A^{[j+1, k+1]} \cdot R_{[k, i]} \right).$$

Neben der Erreichbarkeit sind wir außerdem an der Konstruktion zeitinvarianter Systeme interessiert. Da die Matrizen A_k, B_k jeweils von der Phase $k \in \mathbb{Z}$ des Systems abhängen, ist das periodische System nicht zeitinvariant. Wir betrachten zwei Ansätze für solche Systeme.

Definition 3. *zeitinvariante Systeme*

1. Monodromie-Systeme: Aus der obigen Rechnung ist die Definition von N zeitinvarianten Systemen motiviert. Für festes $1 \leq j \leq N$ betrachten wir

$$y_{k+1} = F_j \cdot y_k + G_j \cdot v_k \text{ mit } k \in \mathbb{Z},$$

beziehungsweise kurz (F_j, G_j) , mit

$$F_j := A^{[j+N, j]} \text{ und } G_j := R_{[j-1, j-N]}$$

Somit ist $F_j \in \mathbb{K}^{n_j \times n_j}$ quadratisch und alle Systemzustände y_k , Ausgangssignale y_{k+1} sowie alle Eingangssignale v_k liegen unabhängig von der Phase im Raum \mathbb{K}^{n_j} .

Die Matrix G_j beschreibt hier die Steuerung von x_j zu x_{j+N} mit geeigneten Inputs.

(F_j, G_j) wird im Folgenden als „Monodromie-System zur Phase j “ und F_j als „Monodromie-Matrix“ bezeichnet.

2. erweiterte Systeme: Ein alternativer Ansatz zur Definition eines zeitinvarianten Systems besteht darin, die Matrizen A_k und B_k jeweils in einer Matrix zusammenzufassen. Hierzu sei

$$n_e := \sum_{k=1}^N n_k \quad \text{und} \quad m_e := \sum_{k=1}^N m_k$$

sowie

$$A_e := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & A_N \\ A_1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & A_{N-1} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n_e \times n_e}$$

und

$$B_e := \begin{pmatrix} B_N & & & 0 \\ & B_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_{N-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n_e \times m_e}.$$

Damit ist ein zeitinvariantes System definiert durch

$$z_{k+1} = A_e \cdot z_k + B_e \cdot w_k \text{ mit } k \in \mathbb{Z},$$

wobei $y_k \in \mathbb{K}^{n_e}$ der neue Systemzustand und $v_k \in \mathbb{K}^{m_e}$ der entsprechende Input ist. Wir bezeichnen (A_e, B_e) als „erweitertes System“.

Bemerkung 4. Die Systemmatrizen F_j und A_e der zeitinvarianten Systeme sind quadratisch. Dann sind die Kalman-Matrizen gegeben durch

$$R_j := \left(G_j | F_j \cdot G_j | \cdots | F_j^{n_j-1} \cdot G_j \right) \in \mathbb{K}^{n_j \times (n_j \cdot m_e)}$$

und

$$R_e := \left(B_e | A_e \cdot B_e | \cdots | A_e^{n_e-1} \cdot B_e \right) \in \mathbb{K}^{n_e \times (n_e \cdot m_e)}.$$

Im Gegensatz zum periodischen Systeme ist es hier leicht einzusehen, dass diese als Matrizen mit endlich vielen Spalten gewählt werden können. Da sich $F_j^{n_j}$ beziehungsweise $A_e^{n_e}$ mit Hilfe des Satzes von Cayley-Hamilton darstellen lassen als

$$F_j^{n_j} = \sum_{k=0}^{n_j-1} a_k \cdot F_j^k \quad \text{und} \quad A_e^{n_e} = \sum_{k=0}^{n_e-1} b_k \cdot A_e^k$$

für geeignete $a_k, b_k \in \mathbb{K}$, sind alle Spalten von R_j beziehungsweise R_e zu den Vektoren der ersten n_j beziehungsweise n_e Blöcke linear abhängig. Wir verzichten daher auf die Schreibweise mit unendlich vielen Spalten.

Die Frage nach der Erreichbarkeit des periodischen Systems lässt sich durch die Untersuchung der obigen Systeme beantworten. Die Suche nach einem solchen äquivalenten zeitinvarianten System ist Aufgabe der Floquet-Theorie. Das Vorgehen für homogene, kontinuierliche Systeme ist in [4] beschrieben. Für die geometrische Untersuchung und Definition einer Normalform im diskreten Fall genügen aber die obigen Ansätze.

Satz 5. *Äquivalenzen für Erreichbarkeit*

1. Sei $j \in \mathbb{Z}$. Das N -periodische System $(A_k, B_k)_N$ ist genau dann zur Phase j erreichbar, wenn ein $i \leq j$ existiert, sodass die Matrix $R_{[j, i]}$ vollen Zeilenrang hat. Dieses Kriterium wird auch „Erreichbarkeitskriterium“ genannt.
2. Das N -periodische System $(A_k, B_k)_N$ ist genau dann erreichbar, wenn für jedes $j \in \overline{N}$ das Monodromie-System (F_j, G_j) erreichbar ist.
3. Das N -periodische System $(A_k, B_k)_N$ ist genau dann erreichbar, wenn das erweiterte System (A_e, B_e) erreichbar ist.

Beweis.

1. Sei $i \in \overline{N}$ fest. Die Matrix $R_{[j, i]}$ hat n_{j+1} Zeilen. Der gewünschte Rang dieser Matrix ist für erreichbare Systeme demnach n_{j+1} .

Die Aussage „ \Leftarrow “ folgt mit Gleichung (1). Hat $R_{[j, i]}$ vollen Zeilenrang n_{j+1} , dann ist die Dimension des Spaltenraums ebenfalls n_{j+1} und die Spalten erzeugen den gesamten Raum $\mathbb{K}^{n_{j+1}}$, in dem das Ausgangssignal x_{j+1} liegt.

Für „ \Rightarrow “ nehmen wir an, dass ein $v \in \mathbb{K}^{n_{j+1}}$ existiert, welches nicht im Bild von $R_{[j, i]}$ liegt. Dann hat $R_{[j, i]}$ nicht vollen Zeilenrang. Wir wählen

$$x_{j+1} = v - A^{[j+1, i]} \cdot x_i.$$

Damit x_i nach x_{j+1} steuerbar ist, müssten nach Gleichung (1) Inputs u_j, \dots, u_i existieren, mit $v = R_{[j, i]} \cdot (u_j^T, \dots, u_i^T)^T$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass v nicht im Bild von $R_{[j, i]}$ ist. Per Kontraposition wäre das System nicht zur Phase j erreichbar.

Äquivalent hierzu ist, dass die Kalman-Matrix R_j^∞ vollen Rang hat, da es sich bei den Matrizen $R_{[j, i]}$ um Abschnitte handelt.

2. Wir betrachten die Kalman-Matrix des Monodromie-Systems zur Phase j . Diese ist laut Bemerkung 4 gegeben durch

$$R_j = \left(G_j | F_j \cdot G_j | \dots | F_j^{n_j-1} \cdot G_j \right).$$

Sei also $(A_k, B_k)_N$ zur Phase $j \in \mathbb{Z}$ erreichbar. Äquivalent hierzu ist nach dem Erreichbarkeitskriterium, dass die Kalman-Matrix R_j^∞ vollen Zeilenrang n_{j+1} hat. Es gilt

$$R_j^\infty = \left(G_j | F_j \cdot G_j | F_j^2 \cdot G_j | \dots \right).$$

Nach dem Satz von Cayley-Hamilton hat diese Matrix genau dann vollen Zeilenrang, wenn R_j vollen Zeilenrang hat. Dies ist laut Erreichbarkeitskriterium dazu äquivalent, dass (F_j, G_j) erreichbar ist.

3. Sei $n_{max} := \max\{n_1, \dots, n_N\}$ und $n_{min} := \min\{n_1, \dots, n_N\}$ sowie $n_{se} := N \cdot n_{max} \geq n_e$. Die Kalman-Matrix des erweiterten Systems ist nach Bemerkung 4 gegeben durch

$$R_e = \left(B_e \mid A_e \cdot B_e \mid \dots \mid A_e^{n_e-1} \cdot B_e \right) \in \mathbb{K}^{n_e \times (n_e \cdot m_e)}.$$

Wir führen außerdem die „umfassenden Kalman-Matrizen“ für die Monodromie-Systeme

$$\bar{R}_j := \left(G_j \mid F_j \cdot G_j \mid \dots \mid F_j^{n_{max}-1} \cdot G_j \right)$$

und für das erweiterte System

$$R_{se} := \left(B_e \mid A_e \cdot B_e \mid \dots \mid A_e^{n_{se}-1} \cdot B_e \right) \in \mathbb{K}^{n_e \times (n_{se} \cdot m_e)}$$

ein. Dann ist

$$R_{se} := \begin{pmatrix} B_N & & & 0 & \dots & 0 & A_N \cdot B_{N-1} & \dots \\ & B_1 & & A_1 \cdot B_N & & & 0 & \dots \\ & & \ddots & & & & \vdots & \\ & & & B_{N-1} & & & 0 & \dots \\ & & & & & A_{N-1} \cdot B_{N-2} & & \dots \end{pmatrix}.$$

Durch Umsortieren der Spalten bringen wir R_{se} auf Blockdiagonalgestalt

$$\begin{aligned} R_{se} &\rightarrow \begin{pmatrix} B_N & \dots & A^{[1, 1-n_{se}+1]} \cdot B_1 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & & B_{N-1} & \dots & A^{[n_{se}, 1]} \cdot B_N \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{R}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{R}_N \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Folglich hat die Matrix R_{se} genau dann vollen Zeilenrang, wenn alle umfassenden Kalman-Matrizen der Monodromie-Systeme vollen Zeilenrang haben. Darüber hinaus gilt mit Bemerkung 4

$$\text{rg}(R_{se}) = \text{rg}(R_e) \quad \text{und} \quad \text{rg}(\bar{R}_j) = \text{rg}(R_j).$$

Die Spaltenvektoren der letzten $n_{max} - n_j$ Blöcke von \bar{R}_j sind linear abhängig zu denen in den ersten n_j Blöcken. Für R_{se} gilt die analoge Aussage.

Schlussendlich folgern wir, dass R_e genau dann vollen Spaltenrang hat, wenn die R_j vollen Spaltenrang haben. Somit ist das erweiterte System genau dann erreichbar, wenn die Monodromie-Systeme erreichbar sind.

□

und die umfassende Kalman-Matrix

$$R_{se} = \left(B_e, A_e \cdot B_e, \dots, A_e^5 \cdot B_e \right) \in \mathbb{K}^{5 \times 18}.$$

Hieran wird deutlich, dass praktische Aufgaben sehr schnell numerisch anspruchsvoll werden können. Wir haben im Beweis von Satz 5 gesehen, dass sich R_{se} durch Spaltenpermutationen auf Blockdiagonalgestalt mit Blöcken \bar{R}_i überführen lässt. Daher sind die beiden Methoden bezüglich des Rechenaufwands gleichwertig.

Wir führen nun Transformationen des Zustandsraums ein. Hiermit sind invertierbare Matrizen gemeint, die das periodische System in eine, bezüglich des Zustandsraums, äquivalente Form überführen. Im Folgenden sei ein zu $(A_k, B_k)_N$ äquivalentes N -periodisches System gegeben durch

$$(\hat{A}_k, \hat{B}_k)_N := (S_{k+1} \cdot A_k \cdot S_k^{-1}, S_{k+1} \cdot B_k)_N$$

mit Matrizen $S_k \in \text{GL}_{n_k}(\mathbb{K})$. Das Tupel (S_1, \dots, S_N) bezeichnen wir auch als „ N -periodische Ähnlichkeits-Transformation des Zustandsraums“. Analog zu den Matrizen A_k gelte hier $S_{j+i \cdot N} := S_j$ für $j \in \bar{N}$ und $i \in \mathbb{Z}$.

Darüber hinaus lassen sich solche Transformationen auch auf das erweiterte System übertragen. Dazu sei $S_e \in \text{GL}_{n_e}(\mathbb{K})$. Eine Transformation des erweiterten Systems ist dann gegeben durch

$$(\hat{A}_e, \hat{B}_e) := (S_e \cdot A_e \cdot S_e^{-1}, S_e \cdot B_e).$$

Der Begriff „Ähnlichkeit“ ist hierbei eine Übertragung aus dem Fall $N = 1$ und zunächst irreführend. Die Systemmatrizen A_k sind im Allgemeinen nicht quadratisch und somit nicht ähnlich zu anderen Matrizen. Zudem stimmen S_{k+1} und S_k nicht überein. Betrachtet man das Mondromie-System, so gilt für die Monodromie-Matrizen zweier ähnlicher N -periodischer Systeme $(A_k, B_k)_N$ und $(\hat{A}_k, \hat{B}_k)_N$ mit Transformation (S_1, \dots, S_N)

$$\begin{aligned} \hat{F}_k &= \hat{A}_{k+N-1} \cdot \dots \cdot \hat{A}_k \\ &= S_{k+N} \cdot A_{k+N-1} \cdot S_{k+N-1}^{-1} \cdot \dots \cdot S_{k+1} \cdot A_k \cdot S_k^{-1} \\ &= S_k \cdot A_{k+N-1} \cdot \dots \cdot A_k \cdot S_k^{-1} \\ &= S_k \cdot F_k \cdot S_k^{-1}. \end{aligned}$$

Dann sind die Monodromie-Matrizen im Sinne des klassischen Begriffs tatsächlich ähnlich. Außerdem gilt für die Kalman-Matrizen

$$\hat{R}_k = S_k \cdot R_k.$$

Hier macht sich die geeignete Definition der Monodromie-Systeme aus 3 bemerkbar.

Die Untersuchung von Invarianten des periodischen Systems unter Ähnlichkeitstransformationen kann durch Betrachtung der zeitinvarianten Systeme erfolgen. Dies motiviert den folgenden Satz.

Satz 8. Sei (A_e, B_e) ein erreichbares erweitertes System wie in Definition 3.

Dann ist auch das durch Transformation $S_e \in \text{GL}_{n_e}(\mathbb{K})$ entstandene System (\hat{A}_e, \hat{B}_e) genau dann von der Form aus Definition 3, wenn S_e die Blockdiagonalgestalt

$$S_e := \begin{pmatrix} S_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S_N \end{pmatrix} \in \text{GL}_{n_e}(\mathbb{K})$$

für invertierbare Matrizen $S_i \in \text{GL}_{n_i}(\mathbb{K})$, $i \in \bar{N}$, hat. Insbesondere ist dann (S_1, \dots, S_N) eine N -periodische Transformation für das zu (A_e, B_e) gehörige N -periodische System.

Beweis. Hat S_e die obige Blockdiagonalgestalt, so folgt durch Nachrechnen, dass

$$S_e \cdot A_e \cdot S_e^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & S_1 \cdot A_N \cdot S_N^{-1} \\ S_2 \cdot A_1 \cdot S_1^{-1} & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & S_N \cdot A_{N-1} \cdot S_{N-1}^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$S_e \cdot B_e = \begin{pmatrix} S_1 \cdot B_N & & \\ & \ddots & \\ & & S_N \cdot B_{N-1} \end{pmatrix}$$

von der gewünschten Form sind. Somit folgt die Aussage „ \Leftarrow “. Die Einträge bilden das periodische System, welches aus $(A_k, B_k)_N$ durch Transformation mit (S_1, \dots, S_N) entsteht.

Es bleibt also die Aussage „ \Rightarrow “ zu zeigen. Seien nun $S_e \cdot A_e \cdot S_e^{-1}$ und $S_e \cdot B_e$ von der gewünschten Gestalt sowie R_{se} und \hat{R}_{se} die umfassenden Kalman-Matrizen der entsprechenden erweiterten Systeme. Dann gilt

$$\hat{R}_{se} = S_e \cdot R_{se}.$$

Des Weiteren bezeichnen \bar{R}_j und $\hat{\bar{R}}_j$ die umfassenden Kalman-Matrizen der zugehörigen Monodromie-Systeme. Aus dem Beweis des vorherigen Satzes existieren invertierbare Permutationsmatrizen $P, \hat{P} \in \text{Gl}_{n_e}(\mathbb{K})$ mit

$$R_{se} = \begin{pmatrix} \bar{R}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{R}_N \end{pmatrix} \cdot P \quad \text{und} \quad \hat{R}_{se} = \begin{pmatrix} \hat{\bar{R}}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \hat{\bar{R}}_N \end{pmatrix} \cdot \hat{P}.$$

Da für diese Form nur Spaltenvertauschungen durchzuführen sind, werden P und \hat{P} von rechts multipliziert. Außerdem haben (A_e, B_e) und (\hat{A}_e, \hat{B}_e) per Annahme dieselbe Gestalt. Folglich ist $P = \hat{P}$ und es gilt

$$S \cdot R_{se} \cdot P = \hat{R}_{se} \cdot P.$$

Wir multiplizieren von rechts mit P^{-1} und erhalten

$$S_e \cdot \begin{pmatrix} \bar{R}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{R}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\bar{R}}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \hat{\bar{R}}_N \end{pmatrix}$$

Nach Voraussetzung sind die periodischen Systeme erreichbar. Laut Erreichbarkeitskriterium haben die umfassenden Kalman-Matrizen daher vollen Zeilenrang und wir können folgern, dass S Blockdiagonalgestalt hat. \square

Zum Abschluss dieses Kapitels widmen wir uns der Kalman-Zerlegung des periodischen Systems. Ist dieses nicht erreichbar, so kann man zeigen, dass es zumindest ein erreichbares „Teilsystem“ gibt. Für den Beweis sowie in Kapitel 5 über die Normalform wird folgende Strukturformel über die Kalman-Matrix verwendet.

Lemma 9. Sei $1 \leq k \leq N$. Dann gilt

$$(B_k, A_k \cdot \bar{R}_k) = (\bar{R}_{k+1}, F_{k+1}^{n_{max}} \cdot B_k).$$

Beweis. Zunächst mache man sich klar, dass $A_k \cdot F_k = F_{k+1} \cdot A_k$ gilt. Insbesondere folgt für alle Potenzen $A_k \cdot F_k^l = F_{k+1}^l \cdot A_k$. Durch geeignete Wahl der Blöcke innerhalb der Kalman-Matrizen folgt

$$\begin{aligned} & (B_k, A_k \cdot \bar{R}_k) \\ &= \left(B_k \left| A_k \cdot G_k \right| A_k \cdot F_k \cdot G_k \left| \cdots \right| A_k \cdot F_k^{n_{max}-1} \cdot G_k \right) \\ &= \left(B_k \left| A_k \cdot B_{k-1}, \dots, A_k \cdot A_{k-1} \cdot \dots \cdot A_{k-N+1} \cdot B_{k-N} \right| \right. \\ & \quad \left. F_{k+1} \cdot A_k \cdot B_{k-1}, \dots, F_{k+1} \cdot A_k \cdot A_{k-1} \cdot \dots \cdot A_{k-N+1} \cdot B_{k-N} \right. \\ & \quad \left. \cdots \left| F_{k+1}^{n_{max}-1} \cdot A_k \cdot B_k, \dots, F_{k+1}^{n_{max}-1} \cdot A_k \cdot \dots \cdot A_{k-N+1} \cdot B_{k-N} \right. \right) \\ &= \left(B_k, A_k \cdot B_{k-1}, \dots \left| A_k \cdot A_{k-1} \cdot \dots \cdot A_{k-N+1} \cdot B_{k-N}, F_{k+1} \cdot A_k \cdot B_{k-1}, \dots \right| \right. \\ & \quad \left. F_{k+1} \cdot A_k \cdot A_{k-1} \cdot \dots \cdot A_{k-N+1} \cdot B_{k-N}, \dots \left| \cdots \left| F_{k+1}^{n_{max}-1} \cdot B_k, F_{k+1}^{n_{max}-1} \cdot A_k \cdot B_k, \dots \right| \right. \right. \\ & \quad \left. \left. F_{k+1}^{n_{max}-1} \cdot A_k \cdot \dots \cdot A_{k-N+1} \cdot B_{k-N} \right. \right) \\ &= \left(B_k, A_k \cdot B_{k-1}, \dots \left| F_{k+1} \cdot B_{k-N}, F_{k+1} \cdot A_k \cdot B_{k-1}, \dots \right| \right. \\ & \quad \left. F_{k+1} \cdot F_{k+1} \cdot B_{k-N}, \dots \left| \cdots \left| F_{k+1}^{n_{max}-1} \cdot B_k, F_{k+1}^{n_{max}-1} \cdot A_k \cdot B_k, \dots \right| \right. \right. \\ & \quad \left. \left. F_{k+1}^{n_{max}-1} \cdot F_{k+1} \cdot B_{k-N} \right. \right) \\ &= \left(G_{k+1} \left| F_{k+1} \cdot G_{k+1} \right| F_{k+1}^2 \cdot G_{k+1} \left| \cdots \right| F_{k+1}^{n_{max}-1} \cdot G_{k+1} \left| F_{k+1}^{n_{max}} \cdot B_{k-N} \right. \right) \\ &= (\bar{R}_{k+1}, F_{k+1}^{n_{max}} \cdot B_k). \end{aligned}$$

□

Wir kommen nun zur Kalman-Zerlegung.

Satz 10. *Kalman-Zerlegung*

Sei $(A_k, B_k)_N$ ein N -periodisches System und $r_k := \text{rang}(R_k)$ der Rang der Kalman-Matrix des zugehörigen Monodromie-Systems zur Phase $k \in \overline{N}$. Dann existieren Ähnlichkeitstransformationen des Zustandsraums, sodass das System äquivalent ist zu $(\hat{A}_k, \hat{B}_k)_N$ mit

$$\hat{A}_k = \begin{pmatrix} A_1^{(k)} & A_2^{(k)} \\ 0 & A_3^{(k)} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{B}_k = \begin{pmatrix} B_1^{(k)} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dabei sind $A_1^{(k)} \in \mathbb{K}^{r_{k+1} \times r_k}$ und $B_1^{(k)} \in \mathbb{K}^{r_{k+1} \times m_k}$ so, dass das N -periodische System $(A_1^{(k)}, B_1^{(k)})_N$ erreichbar ist.

Beweis. Wir betrachten die Kalman-Matrix R_k des Monodromie-Systems zur Phase k . Dann hat R_k genau n_k Zeilen und der Spaltenraum ist ein r_k -dimensionaler Untervektorraum von \mathbb{K}^{n_k} .

Es existiert also eine invertierbare Matrix $S_k \in \text{Gl}_{n_k}(\mathbb{K})$, sodass $S_k \cdot R_k$ in strikter Zeilenstufenform vorliegt und es gilt

$$S_k \cdot \text{Bild}(R_k) = \text{Bild}\left(\begin{pmatrix} E_{r_k} \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Mit der Definition dieser S_k für $k \in \overline{N}$ definieren wir das periodische System $(\hat{A}_k, \hat{B}_k)_N$, welches durch Transformation mit diesen S_k aus dem ursprünglichen System entsteht. Wir benutzen Lemma 9 und folgern

$$\text{Bild}\left([B_k, A_k \cdot R_k]\right) = \text{Bild}(R_{k+1}).$$

Für $n_{k+1} < n_{max}$ ist dies eine direkte Folgerung aus Lemma 9 und für $n_{k+1} = n_{max}$ benutzen wir den Satz von Cayley-Hamilton, mit dessen Hilfe wir $F_{k+1}^{n_{max}}$ durch Potenzen von $F_{k+1} \in \mathbb{K}^{n_{k+1} \times n_{k+1}}$ mit kleinerem Exponenten ausdrücken können.

Übertragen auf die Kalman-Matrix des transformierten zugehörigen Monodromie-Systems ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{Bild}(\hat{R}_{k+1}) &= \text{Bild}\left([\hat{B}_k, \hat{A}_k \cdot \hat{R}_k]\right) \\ &= \text{Bild}(\hat{B}_k) + \hat{A}_k \cdot \text{Bild}(\hat{R}_k) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \text{Bild}(\hat{R}_k) &= \text{Bild}(S_k \cdot R_k) \\ &= S_k \cdot \text{Bild}(R_k). \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\text{Bild}\left(\begin{pmatrix} E_{r_{k+1}} \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \text{Bild}(\hat{B}_k) + \hat{A}_k \cdot \text{Bild}\left(\begin{pmatrix} E_{r_k} \\ 0 \end{pmatrix}\right) \quad (2)$$

bzw.

$$v + \hat{A}_k \cdot w \in \text{Bild}\left(\begin{pmatrix} E_{r_{k+1}} \\ 0 \end{pmatrix}\right) \quad \text{für alle } v \in \text{Bild}(\hat{B}_k) \quad \text{und} \quad w \in \text{Bild}\left(\begin{pmatrix} E_{r_k} \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Für die Wahl $w = 0$ muss \hat{B}_k von der Form

$$\hat{B}_k = \begin{pmatrix} B_1^{(k)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $B_1^{(k)} \in \mathbb{K}^{r_{k+1} \times m_k}$ und für die Wahl $v = 0$ muss \hat{A}_k von der Form

$$\hat{A}_k = \begin{pmatrix} A_1^{(k)} & A_2^{(k)} \\ 0 & A_3^{(k)} \end{pmatrix}$$

mit $A_1^{(k)} \in \mathbb{K}^{r_{k+1} \times r_k}$ sein.

Es bleibt zu zeigen, dass die Kalman-Matrizen $R_1^{(k)}$ der Monodromie-Systeme von $(A_1^{(k)}, B_1^{(k)})_N$ vollen Zeilenrang haben. Hierzu betrachten wir zunächst das Produkt zweier Matrizen der obigen Form $A_1^{(k)}$ und $B_1^{(k)}$. Es gilt

$$\hat{A}_k \cdot \hat{A}_{k-1} \cdot \hat{B}_{k-2} = \begin{pmatrix} A_1^{(k)} \cdot A_1^{(k-1)} & \cdots \\ 0 & \cdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_1^{(k-2)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^{(k)} \cdot A_1^{(k-1)} \cdot B_1^{(k-2)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

und iterativ fortgesetzt für die Kalman-Matrix

$$\hat{R}_k = \begin{pmatrix} R_1^{(k)} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann haben \hat{R}_k und $R_1^{(k)}$ den selben Rang r_k . Da $R_1^{(k)}$ r_k Zeilen besitzt, hat $R_1^{(k)}$ vollen Zeilenrang und das periodische System $(A_1^{(k)}, B_1^{(k)})_N$ ist erreichbar, was zu zeigen war. \square

Beispiel 11. (siehe [2]) Wir betrachten den Fall $N = 1$, $n = 2$ und $m = 1$ sowie Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Kalman-Matrix des zeitinvarianten Systems (A, B) gegeben durch

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und hat Rang 1. Folglich ist das System nicht erreichbar. Für die Wahl

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und somit} \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt

$$S \cdot A \cdot S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei das System $(A_1^{(1)}, B_1^{(1)}) := (1, 1)$ erreichbar ist, da $B_1^{(1)}$ nicht null und somit invertierbar ist.

Bemerkung 12. Der Beweis von Satz 10 ist konstruktiv. Die invertierbare Matrix S_k geht aus dem Gauß-Algorithmus für die Kalman-Matrix R_k hervor, mit dessen Hilfe R_k auf strikte Zeilenstufenform gebracht wird. Wenn beispielsweise ein 2-periodisches System mit $n_1 = n_2 = 2$ und $m_1 = m_2 = 1$ existiert, dessen zugehörige Kalman-Matrizen der beiden Monodromie-Systeme die Form

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

haben, so ist das System nicht erreichbar, da R_2 Rang 1 hat. Mit

$$S_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

sind geeignete Transformationen des Zustandsraums gegeben, sodass $S_i \cdot R_i$ für $i \in \{1, 2\}$ Zeilenstufenform hat. Wir werden den Fall, dass die Matrizen B_k Spaltenvektoren sind, in Kapitel 5 näher untersuchen.

3 Vertretersystem für Ähnlichkeitstransformationen

In diesem Kapitel konzentrieren wir uns auf die Untersuchung der Ähnlichkeits-Transformationen des Zustandsraums. Für ein N -periodisches System $(A_k, B_k)_N$ definieren wir die Index-Tupel

$$\vec{n} := (n_1, \dots, n_N) \text{ und } \vec{m} := (m_1, \dots, m_N).$$

Zunächst betrachten wir den \mathbb{K} -Vektorraum aller N -periodischen Systeme

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_N(\vec{n}, \vec{m}) &:= \left\{ (A_k, B_k)_N \mid A_k \in \mathbb{K}^{n_{k+1} \times n_k}, B_k \in \mathbb{K}^{n_{k+1} \times m_k} \text{ für } k \in \overline{N} \right\} \\ &= \mathbb{K}^{n_2 \times (n_1 + m_1)} \times \dots \times \mathbb{K}^{n_{N+1} \times (n_N + m_N)} \\ &= \prod_{k=1}^N \mathbb{K}^{n_{k+1} \times (n_k + m_k)} \end{aligned}$$

repräsentiert durch die Systemmatrizen A_k und B_k .

Die Gruppe

$$\text{Gl}_{\vec{n}}(\mathbb{K}) := \prod_{k=1}^N \text{Gl}_{n_k}(\mathbb{K})$$

operiert auf $\mathcal{T}_N(\vec{n}, \vec{m})$ durch

$$\begin{aligned} \sigma : \quad \text{Gl}_{\vec{n}}(\mathbb{K}) \times \mathcal{T}_N(\vec{n}, \vec{m}) &\rightarrow \mathcal{T}_N(\vec{n}, \vec{m}) \\ \left((S_1, \dots, S_N), (A_k, B_k)_N \right) &\mapsto (S_{k+1} \cdot A_k \cdot S_k^{-1}, S_{k+1} \cdot B_k)_N. \end{aligned}$$

Wir bezeichnen die Operation σ als „Ähnlichkeits-Operation“.

Die Einschränkung von $\mathcal{T}_N(\vec{n}, \vec{m})$ auf die erreichbaren Systeme sei gegeben durch

$$\hat{\mathcal{E}}_N(\vec{n}, \vec{m}) := \left\{ (A_k, B_k)_N \in \mathcal{T}_N(\vec{n}, \vec{m}) \mid (A_k, B_k)_N \text{ ist erreichbar} \right\}.$$

Dann können wir die Systeme nach Restklassen bezüglich σ einteilen. Es bezeichnet

$$\left[(A_k, B_k)_N \right]_{\sigma} := \left\{ \sigma((S_1, \dots, S_N), (A_k, B_k)_N) \mid (S_1, \dots, S_N) \in \text{Gl}_{\vec{n}}(\mathbb{K}) \right\}$$

die Bahn von $(A_k, B_k)_N$ unter σ und

$$\mathcal{E}_N(\vec{n}, \vec{m}) := \left\{ \left[(A_k, B_k)_N \right]_{\sigma} \mid (A_k, B_k)_N \in \hat{\mathcal{E}}_N(\vec{n}, \vec{m}) \right\}$$

das Vertretersystem von $\hat{\mathcal{E}}_N(\vec{n}, \vec{m})$ unter σ .

Zusätzlich definieren wir noch den Stabilisator eines Elements von $\hat{\mathcal{E}}_N(\vec{n}, \vec{m})$ unter σ als

$$\text{Stab}((A_k, B_k)_N) := \left\{ (S_1, \dots, S_N) \in \text{Gl}_{\vec{n}}(\mathbb{K}) \mid \sigma((S_1, \dots, S_N), (A_k, B_k)_N) = (A_k, B_k)_N \right\}.$$

Hierbei handelt es sich um eine Untergruppe von $\text{Gl}_{\vec{n}}(\mathbb{K})$. Außerdem können wir den Stabilisator mit seinem Tangentialraum assoziieren. Die Dimension der Gruppe $\text{Gl}_n(\mathbb{K}) \subseteq \mathbb{K}^{n \times n}$ der invertierbaren $n \times n$ -Matrizen ist die Dimension des Tangentialraums $\mathbb{K}^{n \times n}$, also n^2 .

Es folgt, dass die Dimension von $\text{Gl}_{\overline{\mathbb{N}}}(\mathbb{K}) \subseteq \mathbb{K}^{n_1 \times n_1} \times \dots \times \mathbb{K}^{n_N \times n_N}$ grade $n_1^2 + \dots + n_N^2$ ist. Für den Stabilisator betrachten wir die Inklusion

$$\begin{aligned} \text{Stab}((A_k, B_k)_N) \subseteq & \left\{ (S_1, \dots, S_N) \in \mathbb{K}^{n_1 \times n_1} \times \dots \times \mathbb{K}^{n_N \times n_N} \mid \forall k \in \overline{N} \text{ gilt} \right. \\ & \left. S_{k+1} \cdot A_k \cdot S_k^{-1} = A_k \text{ und } S_{k+1} \cdot B_k = B_k \right\} \\ =: & \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Die Dimension des Stabilisators ist die Dimension des affinen Raums \mathcal{A} und somit wohldefiniert.

Bemerkung 13. (siehe [2]) Die Menge der erreichbaren Systeme $\hat{\mathcal{E}}_N(\overrightarrow{\mathfrak{n}}, \overrightarrow{\mathfrak{m}})$ ist offen und liegt dicht in $\mathcal{T}_N(\overrightarrow{\mathfrak{n}}, \overrightarrow{\mathfrak{m}})$. Wenn ein Monodromie-System nicht erreichbar ist, so hat die zugehörige Kalman-Matrix R_j nicht vollen Rang. Mit anderen Worten: Jede $n_j \times n_j$ -Untermatrix von R_j hat Determinante 0. Dadurch ergeben sich polynomielle Gleichungen. Die Topologie, in der Varietäten grade die abgeschlossenen Mengen bilden heißt „Zariski-Topologie“.

In Kapitel 2 haben wir Erreichbarkeit durch die zeitinvarianten Systeme und den Rang von Kalman-Matrizen charakterisiert. Es ist auch möglich, diese Eigenschaft mithilfe der Stabilisatorgruppe eines N -periodischen Systems zu untersuchen. Wir benötigen dazu folgenden Hilfssatz aus [5].

Hilfssatz 14. Sei $|\mathbb{K}| > 2$ und (A, B) ein nicht erreichbares, zeitinvariantes System über \mathbb{K} mit $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $B \in \mathbb{K}^{n \times m}$. Dann existiert eine invertierbare Matrix $S \in \text{Gl}_n(\mathbb{K}) \setminus \{E_n\}$ mit

$$S \cdot A \cdot S^{-1} = A \text{ und } S \cdot B = B.$$

Insbesondere gilt für die Kalman-Matrix R des Systems

$$\begin{aligned} R &= \left(B, A \cdot B, \dots, A^{n-1} \cdot B \right) \\ &= \left(S \cdot B, S \cdot A \cdot S^{-1} \cdot S \cdot B, \dots, S \cdot A^{n-1} \cdot S^{-1} \cdot S \cdot B \right) \\ &= S \cdot R. \end{aligned}$$

Für den Fall $|\mathbb{K}| = 2$ wird in [5] des Weiteren das Gegenbeispiel

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{2 \times 2} \text{ und } B := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{2 \times 1}$$

gegeben. Somit gelten für eine quadratische Matrix S die Gleichungen

$$S \cdot B = B \text{ und } S \cdot A = A \cdot S$$

genau dann, wenn S die Diagonalgestalt

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

für ein beliebiges $\alpha \in \mathbb{F}_2$ hat. Einerseits muss für die Invertierbarkeit $\alpha \neq 0$ gelten und die einzige Möglichkeit bleibt $S = E_2$. Andererseits besitzt die Kalman-Matrix

$$R = \left(B, A \cdot B \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

nicht vollen Zeilenrang und somit ist (A, B) nicht erreichbar.

Lemma 15. Sei $|\mathbb{K}| > 2$ und $(A_k, B_k)_N$ ein N -periodisches System. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

1. Das System $(A_k, B_k)_N$ ist erreichbar.
2. Die Stabilisatorgruppe $\text{Stab}((A_k, B_k)_N)$ enthält nur das neutrale Element.
3. Der Tangentialraum von $\text{Stab}((A_k, B_k)_N)$ ist als affiner \mathbb{K} -Raum nulldimensional.

Beweis. Für den Beweis von „1. \Rightarrow 2.“ betrachten wir das erweiterte System (A_e, B_e) . Es sei $(A_k, B_k)_N$ erreichbar und $(S_1, \dots, S_N) \in \text{Stab}((A_k, B_k)_N)$. Dann erfüllt

$$S_e := \begin{pmatrix} S_1 & & \\ & \ddots & \\ & & S_N \end{pmatrix}$$

die Gleichungen

$$S_e \cdot A_e \cdot S_e^{-1} = A_e \quad \text{und} \quad S_e \cdot B_e = B_e.$$

Insbesondere gilt $S_e \cdot R_e = R_e$ für die Kalman-Matrix des erweiterten Systems. Da $(A_k, B_k)_N$ erreichbar ist, ist auch (A_e, B_e) erreichbar und nach dem Erreichbarkeitskriterium hat R_e vollen Zeilenrang. Daher ist $S_e = E_{n_e}$ und der Stabilisator von $(A_k, B_k)_N$ ist die triviale Gruppe.

Der Beweis von „2. \Rightarrow 1.“ erfolgt mit Hilfssatz 22. Sei dazu $(A_k, B_k)_N$ nicht erreichbar. Dann sind auch die Monodromie-Systeme nicht erreichbar und laut Hilfssatz existieren für jede Kalman-Matrix R_k des Monodromie-Systems zur Phase $k \in \bar{N}$ eine invertierbare Matrix $S_k \neq E_{n_k}$ mit

$$S_k \cdot R_k = R_k.$$

Wir werden in Kapitel 4, Satz 23, zeigen, dass dann bereits

$$S_{k+1} \cdot A_k \cdot S_k^{-1} = A_k \quad \text{und} \quad S_{k+1} \cdot B_k = B_k$$

für jedes $k \in \bar{N}$ gilt. Somit ist der Stabilisator von $(A_k, B_k)_N$ nicht trivial.

Für die Äquivalenz der zweiten und dritten Aussage betrachten wir die Gleichungen

$$T_{k+1} \cdot A_k = A_k \cdot T_k \quad \text{und} \quad T_{k+1} \cdot B_k = 0.$$

Die Lösungsmenge \mathcal{L} ist eine Lie-Algebra mit Lie-Klammer

$$\begin{aligned} \star : \quad \mathcal{L} \times \mathcal{L} &\quad \rightarrow \quad \mathcal{L} \\ \left((T_k^1)_{k \in \bar{N}}, (T_k^2)_{k \in \bar{N}} \right) &\quad \mapsto \quad (T_k^1 \cdot T_k^2 - T_k^2 \cdot T_k^1)_{k \in \bar{N}}, \end{aligned}$$

wie man leicht nachrechnen kann. Bekanntlich hat die Lie-Algebra dieselbe Dimension, wie der affine Raum, welcher durch die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$S_{k+1} \cdot A_k = A_k \cdot S_k \quad \text{und} \quad S_{k+1} \cdot B_k = B_k$$

gegeben ist. Diese hat dieselbe Dimension wie der Stabilisator von $(A_k, B_k)_N$ und entsteht aus \mathcal{L} durch Translation. Wenn also $\text{Stab}((A_k, B_k)_N)$ nulldimensional ist, so ist auch \mathcal{L} nulldimensional und somit der Null-Raum. Damit ist auch $\text{Stab}((A_k, B_k)_N)$ einelementig. Umgekehrt folgt aus der Trivialität der Stabilisatorgruppe, dass \mathcal{L} der Null-Raum ist. \square

Auf der Menge der erreichbaren Systeme ist σ also eine Operation unter der alle Elemente nur triviale Stabilisatoren haben. Man sagt auch „ σ ist eine freie Operation“. Damit haben wir neben den Charakterisierungen für Erreichbarkeit aus Kapitel 2 eine weitere gefunden, die nur Kenntnisse über die Stabilisatorgruppe voraussetzt. Für den weiteren Verlauf dieses Kapitels sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Wir betrachten die kanonische Projektion

$$\pi : \hat{\mathcal{E}}_N(\vec{\pi}, \vec{m}) \rightarrow \mathcal{E}_N(\vec{\pi}, \vec{m}).$$

Um analytische Aussagen über die Menge der erreichbaren Systeme machen zu können, wählen wir die kleinste Topologie unter der π stetig ist.

Satz 16. Der Graph von σ , gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\sigma) &:= \left\{ \left((A_k, B_k)_N, \sigma((A_k, B_k)_N, (S_1, \dots, S_N)) \right) \mid (A_k, B_k)_N \in \hat{\mathcal{E}}_N(\vec{\pi}, \vec{m}) \text{ und } (S_1, \dots, S_N) \in \text{Gl}_{\vec{\pi}}(\mathbb{K}) \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \in (\hat{\mathcal{E}}_N(\vec{\pi}, \vec{m}))^2 \mid [x]_\sigma = [y]_\sigma \right\}, \end{aligned}$$

ist eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von $(\hat{\mathcal{E}}_N(\vec{\pi}, \vec{m}))^2$.

Beweis. Sei $\hat{\mathcal{E}}_N^e(\vec{\pi}, \vec{m})$ die Menge aller erreichbaren erweiterten Systeme, die aus den periodischen Systemen hervorgehen. Ferner sei G definiert durch

$$\begin{aligned} G : \text{Gl}_{n_e} \times \hat{\mathcal{E}}_N^e(\vec{\pi}, \vec{m}) &\rightarrow \hat{\mathcal{E}}_N^e(\vec{\pi}, \vec{m}) \times \hat{\mathcal{E}}_N^e(\vec{\pi}, \vec{m}) \\ \left(S_e, (A_e, B_e) \right) &\mapsto \left((A_e, B_e), (S_e \cdot A_e \cdot S_e^{-1}, S_e \cdot B_e) \right). \end{aligned}$$

Wir zeigen zunächst, dass G injektiv ist. Sei dazu

$$G(S, (A, B)) = G(\hat{S}, (\hat{A}, \hat{B})).$$

Dann ist $(A, B) = (\hat{A}, \hat{B})$ und es gilt

$$(S \cdot A \cdot S^{-1}, S \cdot B) = (\hat{S} \cdot A \cdot \hat{S}^{-1}, \hat{S} \cdot B).$$

Hierzu ist die Gleichung

$$(\hat{S}^{-1} \cdot S \cdot A \cdot S^{-1} \cdot \hat{S}, \hat{S}^{-1} \cdot S \cdot B) = (A, B).$$

äquivalent. Da (A, B) erreichbar und σ laut Lemma 15 eine freie Operation ist, gilt $\hat{S}^{-1} \cdot S = E_{n_e}$. Also ist $S = \hat{S}$ und G ist injektiv.

Das Bild von G ist der Graph von σ . Wir müssen also zeigen, dass das Bild abgeschlossen in $(\hat{\mathcal{E}}_N^e(\vec{\pi}, \vec{m}))^2$ liegt. Dazu betrachten wir konvergente Folgen von erweiterten Systemen

$$\begin{aligned} (A_e^{(l)}, B_e^{(l)}) &\rightarrow (A_e, B_e) \in \hat{\mathcal{E}}_N^e(\vec{\pi}, \vec{m}) \text{ für } l \rightarrow \infty \\ (S_e^{(l)} \cdot A_e^{(l)} \cdot (S_e^{(l)})^{-1}, S_e^{(l)} \cdot B_e^{(l)}) &\rightarrow (\hat{A}_e, \hat{B}_e) \in \hat{\mathcal{E}}_N^e(\vec{\pi}, \vec{m}) \text{ für } l \rightarrow \infty \end{aligned}$$

mit $l \in \mathbb{N}$. Es ist zu zeigen, dass dann auch die Folge $(S_e^{(l)})_{l \in \mathbb{N}}$ selbst gegen eine invertierbare Matrix S_e konvergiert. Dazu benutzen wir das Erreichbarkeitskriterium, wonach die Kalman-Matrizen

$R_e^{(l)}$ und R_e sowie $\hat{R}_e^{(l)}$ und \hat{R}_e der erweiterten Systeme

$$(A_e^{(l)}, B_e^{(l)}) \text{ und } (A_e, B_e) \text{ sowie } (S_e^{(l)} \cdot A_e^{(l)} \cdot (S_e^{(l)})^{-1}, S_e^{(l)} \cdot B_e^{(l)}) \text{ und } (\hat{A}_e, \hat{B}_e)$$

vollen Rang n_e haben. Dann gilt

$$\dim(\text{Kern}(R_e^{(l)})) = \dim(\text{Kern}(R_e)) = n_e \cdot m_e - \dim(\text{Bild}(R_e)) = n_e \cdot m_e - n_e.$$

Folglich existieren injektive Homomorphismen $\phi, \phi^{(l)} \in \text{Hom}(\mathbb{K}^{n_e}, \mathbb{K}^{n_e \cdot m_e})$, sodass

$$\text{Kern}(R_e^{(l)}) \oplus \text{Bild}(\phi^{(l)}) = \text{Kern}(R_e) \oplus \text{Bild}(\phi) = \mathbb{K}^{n_e \cdot m_e}$$

gilt und $\phi^{(l)} \rightarrow \phi$ für $l \rightarrow \infty$ bezüglich der Operatornorm konvergiert. Die Abbildungsmatrizen M und $M^{(l)}$ von ϕ und $\phi^{(l)}$ liegen dann in $\mathbb{K}^{(n_e \cdot m_e) \times n_e}$. Des Weiteren gilt nach Konstruktion, dass $\text{Kern}(R_e) = \text{Kern}(\hat{R}_e)$ und folglich die Matrix

$$S_e := \hat{R}_e \cdot M \cdot (R_e \cdot M)^{-1}$$

wohldefiniert und invertierbar ist.

Wir benutzen nun

$$\hat{R}_e^{(l)} \cdot M^{(l)} \rightarrow \hat{R}_e \cdot M \quad \text{und} \quad R_e^{(l)} \cdot M^{(l)} \rightarrow R_e \cdot M \quad \text{für} \quad l \rightarrow \infty$$

sowie

$$S_e^{(l)} \cdot R_e^{(l)} = \hat{R}_e^{(l)}$$

um

$$\begin{aligned} S_e^l &= S_e^{(l)} \cdot (R_e^{(l)} \cdot M^{(l)}) \cdot (R_e^{(l)} \cdot M^{(l)})^{-1} \\ &= (\hat{R}_e^{(l)} \cdot M^{(l)}) \cdot (R_e^{(l)} \cdot M^{(l)})^{-1} \\ &\rightarrow S_e \quad \text{für} \quad l \rightarrow \infty \end{aligned}$$

zu erhalten. Also ist das Bild von σ abgeschlossen. Aufgrund der Injektivität und der Tatsache, dass G eine Immersion ist (siehe [1]), folgt, dass das Bild eine Untermannigfaltigkeit ist. \square

Mit diesem Satz und Hilfssatz 17 aus der Funktionalanalysis können wir $\mathcal{E}_N(\vec{\pi}, \vec{m})$ als Mannigfaltigkeit auffassen.

Hilfssatz 17. (siehe [1]) Sei F eine K -Mannigfaltigkeit, G eine Gruppe und σ eine freie Operation von G auf F . Wenn der Graph von σ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von $F \times F$ ist, dann ist das Bild der Projektion von $x \in F$ auf die Bahn von x unter σ eine Mannigfaltigkeit mit Dimension $\dim(X) - \dim(G)$.

Dieser Satz ist eine Version des Satzes vom abgeschlossenen Graphen aus [3]. Wenn wir $\hat{\mathcal{E}}_N(\vec{\pi}, \vec{m})$ als Mannigfaltigkeit auffassen und die Projektion π betrachten, so können wir den Hilfssatz auf die Menge der erreichbaren Systeme übertragen und mit Lemma 15 und Satz 16 folgt das Korollar 18.

Korollar 18. $\mathcal{E}_N(\vec{\pi}, \vec{m})$ ist eine \mathbb{K} -Mannigfaltigkeit der Dimension

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{E}_N(\vec{\pi}, \vec{m})) &= \dim(\hat{\mathcal{E}}_N(\vec{\pi}, \vec{m})) - \dim(\text{Gl}_{\vec{\pi}}(\mathbb{K})) \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} n_{j+1} \cdot (n_j + m_j) - n_{j+1}^2. \end{aligned}$$

4 Kalman-Einbettung

In diesem Kapitel sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} . Gesucht ist eine geometrische Interpretation der Menge der erreichbaren Systeme $\mathcal{E}_N(\vec{n}, \vec{m})$.

Wir betrachten die umfassende Kalman-Matrix \bar{R}_j des zum N -periodischen System $(A_k, B_k)_N$ gehörigen Monodromie-Systems der Phase j mit

$$\bar{R}_j = (G_j, F_j \cdot G_j, \dots, F_j^{n_{max}-1} \cdot G_j)$$

mit $j \in \bar{N}$. Dazu sei $U_j \leq \mathbb{K}^{m_e \cdot n_{max}}$ der Zeilenraum von \bar{R}_j . Da das System erreichbar ist, hat \bar{R}_j vollen Zeilenrang, also ist U_j ein n_j -dimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum.

Definition 19. Grassmann-Mannigfaltigkeit

Sei \mathbb{K} ein Körper und V ein endlich-dimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum. Sei außerdem $n \leq \dim(V)$. Dann heißt

$$\text{Grass}(n, V) := \{U \leq V \text{ mit } \dim(U) = n\}$$

die „ n -Grassmann-Mannigfaltigkeit von V “.

Mit dieser Definition ist U_j für $j \in \bar{N}$ ein Element von $\text{Grass}(n_j, \mathbb{K}^{m_e \cdot n_{max}})$.

Proposition 20. Im Folgenden bezeichnen wir mit

$$\chi_j(\lambda) := \det(\lambda \cdot E_{n_j} - F_j)$$

die charakteristischen Polynome der F_j . Für diese gilt

$$\chi_i(\lambda) = \lambda^{n_i - n_j} \chi_j(\lambda),$$

falls $n_i \geq n_j$ ist.

Des Weiteren sei $c_{min} \in \mathbb{K}^{n_{min}}$ der Koeffizientenvektor von $\chi_{min} := \chi_i$ mit $n_i = n_{min} = \min\{n_j\}$. Analog sei $c_{max} \in \mathbb{K}^{n_{max}}$ der Koeffizientenvektor von χ_{max} . Hierbei wird jeweils der erste Eintrag 1 weggelassen, da die charakteristischen Polynome normiert sind.

Beweis. Sei zunächst $N = 2$. Wir betrachten

$$\begin{aligned} & \lambda^{n_1} \cdot \chi_{A_1 \cdot A_2} \\ &= \det \begin{pmatrix} \lambda \cdot I_{n_1} & A_2 \\ 0 & \lambda \cdot I_{n_2} - A_1 \cdot A_2 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ -A_1 & I_{n_2} \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} \lambda \cdot I_{n_1} & A_2 \\ \lambda \cdot A_1 & \lambda \cdot I_{n_2} \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \lambda \cdot I_{n_1} & A_2 \\ \lambda \cdot A_1 & \lambda \cdot I_{n_2} \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ -A_1 & I_{n_2} \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \lambda \cdot I_{n_1} - A_2 \cdot A_1 & A_2 \\ 0 & \lambda \cdot I_{n_2} \end{pmatrix} \\ &= \lambda^{n_2} \cdot \chi_{A_2 \cdot A_1}. \end{aligned}$$

Für $n_1 \geq n_2$ folgt $\chi_{A_2 \cdot A_1} = \lambda^{n_1 - n_2} \cdot \chi_{A_1 \cdot A_2}$. Sei nun $N \geq 2$. Dann gilt mit der Rechnung für den ersten Fall

$$\begin{aligned} & \lambda^{n_i} \cdot \chi_j \\ &= \lambda^{n_i} \cdot \chi_{A_{j+N-1} \dots A_j} \\ &= \lambda^{n_i} \cdot \chi_{(A_{j+N-1} \dots A_{i+N}) \cdot (A_{i+N-1} \dots A_j)} \\ &= \lambda^{n_j} \cdot \chi_{(A_{i+N-1} \dots A_j) \cdot (A_{j+N-1} \dots A_{i+N})} \\ &= \lambda^{n_j} \cdot \chi_i. \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die periodische Definition der A_k ausgenutzt wird. Damit ist alles gezeigt. \square

Definition 21. *Kalman-Einbettung*

Die Abbildung

$$\mathcal{K} : \mathcal{E}_N(\vec{\gamma}, \vec{m}) \rightarrow \mathbb{K}^{n_{min}} \times \prod_{j \in \bar{N}} \text{Grass}(n_j, \mathbb{K}^{m_e \cdot n_{max}})$$

$$\left[(A_k, B_k)_N \right]_{\sigma} \mapsto \left(c_{min}, U_1, \dots, U_N \right)$$

wird als „Kalman-Einbettung“ bezeichnet.

Laut Proposition 20 ist das charakteristische Polynom einer Monodromie-Matrix F_j bereits vollständig durch den Koeffizientenvektor c_{min} beschrieben. Des Weiteren gilt für $(\hat{A}, \hat{B})_N \in \left[(A_k, B_k)_N \right]_{\sigma}$ mit der Ähnlichkeitstransformation (S_1, \dots, S_N) für die zugehörigen Monodromie- und Kalman-Matrizen

$$S_j \cdot F_j \cdot S_j^{-1} = \hat{F}_j \quad \text{und} \quad S_j \cdot R_j = \hat{R}_j.$$

Da ähnliche Matrizen dasselbe charakteristische Polynom sowie R_j und \hat{R}_j dieselben Zeilenräume besitzen, ist \mathcal{K} wohldefiniert.

Hilfssatz 22. *minimale Realisierungen*

In [2] werden Realisierungen von Transfer-Matrizen H für zeitinvariante Input-Output-Systeme eingeführt und folgende Aussagen bewiesen.

Sei $\sigma(A) \in \mathbb{K}$ der Spektralradius von A . Wir haben bis jetzt Input-Systeme (A, B) mit $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $B \in \mathbb{K}^{n \times m}$ untersucht. Ein zu (A, B) gehöriges Output-System hat die Form

$$y_k = S \cdot x_k + T \cdot u_k \quad \text{für} \quad k \in \mathbb{Z}$$

mit $y_k \in \mathbb{K}^l$, $S \in \mathbb{K}^{l \times n}$, $T \in \mathbb{K}^{l \times m}$ und den zu (A, B) gehörigen Inputs $u_k \in \mathbb{K}^m$. Das Input-Output-System wird über das Matrix-Tupel (A, B, S, T) definiert. Dann gelten die folgenden Aussagen.

1. Die Transfer-Matrix von (A, B, S, T) ist gegeben durch

$$H = S \cdot (\lambda \cdot E_n - A)^{-1} \cdot B + T \in \mathbb{K}[\lambda]^{l \times m}$$

für $\lambda > \sigma(A)$. Diese Darstellung wird auch „Realisierung von H der Größe n “ genannt und mit $[A, B, S, T]$ bezeichnet. Hierbei ist n die Anzahl der Zeilen und Spalten von A . Man bezeichnet die Realisierung als „minimal“ wenn es keine Realisierung mit einer kleineren Größe $\hat{n} < n$ gibt.

2. Das Matrixpaar (A, S) heißt „beobachtbar“, wenn die Matrix

$$\begin{pmatrix} S \\ S \cdot A \\ \vdots \\ S \cdot A^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{(l \cdot n) \times n}$$

vollen Spaltenrang n hat (siehe [2]).

Wenn (A, B) erreichbar und (A, S) beobachtbar ist, dann ist $[A, B, S, T]$ eine minimale Realisierung von H . Insbesondere gilt dies für $T = 0$ und $S \in \text{Gl}_n(\mathbb{K})$.

3. Sind $[A, B, S, T]$ und $[\hat{A}, \hat{B}, \hat{S}, \hat{T}]$ zwei minimale Realisierungen von H , so existiert eine invertierbare Matrix $U \in \text{Gl}_n(\mathbb{K})$ mit

$$U^{-1} \cdot A \cdot U = \hat{A}, \quad U^{-1} \cdot B = \hat{B}, \quad C \cdot U = \hat{C} \quad \text{und} \quad T = \hat{T}.$$

Damit können wir Elemente des Vertretersystems $\mathcal{E}_N(\vec{\mathfrak{m}}, \vec{\mathfrak{m}})$ unter der Kalman-Einbettung als Tupel von Vektorräumen mit einer gewissen Struktur, die im Beweis des nächsten Satzes erläutert wird, identifizieren, indem wir zeigen, dass \mathcal{K} tatsächlich eine Einbettung ist.

Satz 23. Die Kalman-Einbettung ist injektiv. Das Bild ist Zariski-abgeschlossen.

Beweis. Wir beweisen die Injektivität zunächst für den Fall $N = 1$. Seien dazu zwei Systeme (A, B) und $(\hat{A}, \hat{B}) \in \mathcal{E}_1(n, m)$ gegeben mit $\mathcal{K}([A, B]_\sigma) = \mathcal{K}([\hat{A}, \hat{B}]_\sigma)$.

Die zugehörigen Kalman-Matrizen sind dann von der Form

$$R := \left(B, A \cdot B, \dots, A^{n-1} \cdot B \right)$$

und

$$\hat{R} := \left(\hat{B}, \hat{A} \cdot \hat{B}, \dots, \hat{A}^{n-1} \cdot \hat{B} \right).$$

Per Definition der Kalman-Einbettung stimmen dann die Zeilenräume von R und \hat{R} überein. Daher existieren quadratische Matrizen $S, \hat{S} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit

$$S \cdot R = \hat{R} \quad \text{und} \quad \hat{S} \cdot \hat{R} = R.$$

Umgeformt ergeben diese Gleichungen

$$S \cdot \hat{S} \cdot \hat{R} = \hat{R} \quad \text{und} \quad \hat{S} \cdot S \cdot R = R.$$

Da die Systeme erreichbar sind, haben R und \hat{R} vollen Zeilenrang und es muss $S \cdot \hat{S} = \hat{S} \cdot S = E_n$ gelten. Folglich sind S und \hat{S} invertierbar mit $S^{-1} = \hat{S}$. Des Weiteren gilt wegen $S \cdot R = \hat{R}$

$$S \cdot B = \hat{B} \quad \text{und} \quad S \cdot A^i \cdot B = \hat{A}^i \cdot \hat{B}$$

für $1 \leq i \leq n-1$.

Zur Anwendung des Hilfssatzes betrachten wir die Transfer-Matrix

$$H := S \cdot (\lambda \cdot I - A)^{-1} \cdot B.$$

Für $\lambda > \sigma(A)$ können wir diese Realisierung als Potenzreihe um 0 entwickeln mit

$$\begin{aligned} H &= S \cdot (\lambda \cdot I - A)^{-1} \cdot B \\ &= S \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \left(I - \frac{1}{\lambda} \cdot A \right)^{-1} \cdot B \\ &= S \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \left(\sum_{i \in \mathbb{N}_0} \frac{1}{\lambda^i} \cdot A^i \right) \cdot B \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}_0} \frac{1}{\lambda^{i+1}} \cdot S \cdot A^i \cdot B \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}_0} \frac{1}{\lambda^{i+1}} \cdot \hat{A}^i \cdot \hat{B} \\ &= E_n \cdot (\lambda \cdot I - \hat{A})^{-1} \cdot \hat{B}. \end{aligned}$$

Es existieren also zwei Realisierungen $[A, B, S, 0]$ und $[\hat{A}, \hat{B}, E_n, 0]$ von H . Da die Systeme erreichbar sind und $S, E_n \in \text{Gl}_n(\mathbb{K})$ liegen, handelt es sich laut Hilfssatz 22 um minimale Realisierungen. Dann existiert eine invertierbare Matrix U mit $S \cdot U = E_n$, also $U = S^{-1}$ und folglich

$$S \cdot A \cdot S^{-1} = \hat{A}.$$

Daher sind die Systeme ähnlich. Insbesondere ist $\left[(A, B) \right]_{\sigma} = \left[(\hat{A}, \hat{B}) \right]_{\sigma}$ und die Kalman-Einbettung ist für $N = 1$ injektiv.

Sei nun $N \geq 1$. Für zwei erreichbare Systeme $(A_k, B_k)_N, (\hat{A}_k, \hat{B}_k)_N \in \mathcal{E}_N(\vec{\gamma}, \vec{m})$ gelte

$$\mathcal{K}\left(\left[(A_k, B_k)_N\right]_{\sigma}\right) = \mathcal{K}\left(\left[(\hat{A}_k, \hat{B}_k)_N\right]_{\sigma}\right).$$

Wir betrachten die zugehörigen Monodromie-Systeme (F_j, G_j) und (\hat{F}_j, \hat{G}_j) zur Phase $j \in \bar{N}$. Per Definition von \mathcal{K} stimmen die Zeilenräume der entsprechenden Kalman-Matrizen R und \hat{R} überein. Aus der Injektivität von \mathcal{K} für $N = 1$ folgt nun, dass (F_j, G_j) und (\hat{F}_j, \hat{G}_j) ähnliche Systeme sind. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können kann also angenommen werden, dass sie gleich sind. Andernfalls wählen wir andere Vertreter der Bahnen $\left[(A_k, B_k)_N\right]_{\sigma}$ und $\left[(\hat{A}_k, \hat{B}_k)_N\right]_{\sigma}$. Nach Definition der G_j sind dann auch alle Matrizen B_k und \hat{B}_k gleich. Es bleibt also zu zeigen, dass die Matrizen A_k und \hat{A}_k identisch sind.

Dazu betrachten wir das erweiterte System (A_e, B_e) von $(A_k, B_k)_N$ und bilden Potenzen der quadratischen Matrix A_e . Dann gilt

$$A_e^{n_{se}} = A_e^{N \cdot n_{max}} = \left(\text{diag}(F_1, \dots, F_N) \right)^{n_{max}} = \text{diag}(F_1^{n_{max}}, \dots, F_N^{n_{max}}).$$

Wir wenden nun Proposition 20 auf die Matrizen F_j an. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} F_j^{n_{max}} &= F_j^{n_{max}-n_j} \cdot F_j^{n_j} \\ &= F_j^{n_{max}-n_j} \cdot F_j^{n_j-n_{min}} \cdot \sum_{i=0}^{n_{min}-1} c_i \cdot F_j^i \\ &= F_j^{n_{max}-n_{min}} \cdot \sum_{i=0}^{n_{min}-1} c_i \cdot F_j^i, \end{aligned}$$

wobei die Koeffizienten c_i grade die Einträge von c_{min} sind. Ziehen wir die Potenz von F_j in die Summe hinein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} F_j^{n_{max}} &= \sum_{i=0}^{n_{min}-1} c_i \cdot F_j^{i+n_{max}-n_{min}} \\ &= \sum_{l=n_{max}-n_{min}}^{n_{max}-1} c_{l-n_{max}+n_{min}} \cdot F_j^l \\ &= \sum_{l=0}^{n_{max}-1} \hat{c}_l \cdot F_j^l, \end{aligned}$$

wobei die neuen Koeffizienten \hat{c}_l die Einträge von c_{max} sind. Im letzten Schritt verwenden wir Proposition 20, wonach $c_{max} = (0, \dots, 0, c_{min}^T)^T \in \mathbb{K}^{n_{max}}$ gilt. Für die Systemmatrizen des erweiterten Systems folgern wir

$$A_e^{n_{se}} = \sum_{l=0}^{n_{max}-1} \hat{c}_l \cdot \text{diag}(F_1^l, \dots, F_N^l) = \sum_{l=0}^{n_{max}-1} \hat{c}_l \cdot A_e^l. \quad (3)$$

Wir definieren die verallgemeinerten Begleitmatrizen

$$C_k := \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & L_0^{(k)} \\ E_{m_{k-1}} & & & L_1^{(k)} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & E_{m_{k-d+1}} & L_{d-1}^{(k)} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m_e \cdot n_{max} \times m_e \cdot n_{max}}$$

für $i \in \overline{N}$. Hierbei seien die Matrizen $L_r^{(k)}$ gegeben durch

$$L_r^{(k)} := \begin{cases} \hat{c}_j \cdot E_{m_k}, & \text{wenn } r = N \cdot j \text{ für } 0 \leq j \leq n_{max} - 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Zu beachten ist hierbei, dass $L_r^{(k)}$ im zweiten Fall keine $m_k \times m_k$ -Matrix ist. Das Format ist so zu wählen, dass die Zeilenanzahl mit der der Einheitsmatrix in der jeweiligen Zeile von C_k übereinstimmt. Andernfalls wäre C_k nicht wohldefiniert. Mit Gleichung (3) erhalten wir insgesamt

$$\begin{pmatrix} \overline{R}_1 C_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \overline{R}_N C_N & \end{pmatrix} = A_e \begin{pmatrix} 0 & \overline{R}_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \overline{R}_{N-1} \\ \overline{R}_N & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_N \overline{R}_N & & & \\ & A_1 \overline{R}_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{N-1} \overline{R}_{N-1} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Da die umfassenden Kalman-Matrizen \overline{R}_k aufgrund der Erreichbarkeit des periodischen Systems vollen Zeilenrang haben, besitzt Gleichung (4) eine eindeutige Lösungen (A_1, \dots, A_N) , was zu zeigen war. Also ist \mathcal{K} injektiv.

Wir kommen nun zur Abgeschlossenheit des Bildes. Dazu betrachten wir die linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} \phi_k : \mathbb{K}^{m_e \cdot n_{max}} &\rightarrow \mathbb{K}^{m_e \cdot n_{max}} \\ v &\mapsto C_k^T \cdot v \end{aligned}$$

mit $k \in \overline{N}$. Aus Gleichung (4) folgt, dass die \mathbb{K} -Vektorräume $(V_1, \dots, V_N) \in \prod_{k \in \overline{N}} \text{Grass}(n_j, \mathbb{K}^{m_e \cdot n_{max}})$ genau dann im Bild von \mathcal{K} liegen, wenn $\phi_k(V_k) \subseteq V_{k-1}$ für alle $k \in \overline{N}$ gilt, wobei $V_0 := V_N$ ist. Sei ferner P_k die orthogonale Projektion von $\mathbb{K}^{m_e \cdot n_{max}}$ auf V_k . Dann ist die Eigenschaft „ $v \in V_{k-1}$ “ für $v \in \mathbb{K}^{m_e \cdot n_{max}}$ äquivalent zu

$$(E_{m_e \cdot n_{max}} - P_{k-1}) \cdot v = 0.$$

Setzen wir des Weiteren voraus, dass $v \in \phi_k(V_k)$ gilt, so ergeben sich hieraus algebraische Gleichungen, da ϕ_k durch die Einträge des Koeffizientenvektors c_{min} vollständig beschrieben ist. Also ist das Bild von \mathcal{K} im Sinne der Zariski-Topologie abgeschlossen. \square

Bemerkung 24. Wir haben im Beweis gezeigt, dass

$$S_k \cdot R_k = R_k$$

für jedes $k \in \overline{N}$ bereits

$$S_{k+1} \cdot A_k \cdot S_k^{-1} = A_k \quad \text{und} \quad S_{k+1} \cdot B_k = B_k$$

für alle k impliziert. Somit ist auch der Beweis von Lemma 15 aus Kapitel 3 vollständig.

Für den Beweis von Satz 23 haben wir nur die Gleichheit der Zeilenräume verwendet. Daher war die Abbildung auf den Koeffizientenvektor c_{min} nicht relevant. Der folgende Exkurs motiviert diese Wahl.

Exkurs: Nullfasern

Wir betrachten den „charakteristischen (algebraischen) Morphismus“

$$\begin{aligned} \chi: \mathcal{E}_N(\vec{n}, \vec{m}) &\rightarrow \mathbb{K}^{n_{min}} \\ \left[(A_k, B_k)_N \right]_{\sigma} &\mapsto c_{min} \end{aligned}$$

auf. Man kann laut [1] zeigen, dass für die Urbilder des Koeffizientenvektors c unter χ gilt

$$\chi^{-1}(c) \doteq \left\{ (V_1, \dots, V_N) \in \prod_{1 \leq j \leq N} \text{Grass}(n_j, \mathbb{K}^{m_e \cdot n_{max}}) \text{ mit } \phi_k(V_k) \subset V_{k-1} \text{ für } k \in \overline{N} \right\},$$

wobei die linearen Abbildungen ϕ_k so definiert sind, wie im Beweis von Satz 23.

Zum Abschluss dieses Kapitels betrachten wir einige Beispiele für Nullfasern $\chi^{-1}(0)$ und deren geometrische Darstellung. Dafür beschränken wir uns auf den Fall $n := n_1 = \dots = n_N$ und $m := m_1 = \dots = m_N$ für Systeme mit konstant großem Zustandsraum \mathbb{K}^n und Input-Raum \mathbb{K}^m .

Beispiel 25. Beispiele für Nullfasern

1. Sei $N = 2$ und $n = m = 1$. Dann ist ein periodisches System gegeben durch

$$(a_k, b_k)_2 = \left((a_1, b_1), (a_2, b_2) \right).$$

Die Monodromie-Systeme bestehen dann aus den Matrizen

$$F := F_1 = F_2 = a_1 \cdot a_2 \in \mathbb{K} \quad \text{und} \quad G_1 = (b_2, a_2 \cdot b_1) = R_1, \quad G_2 = (b_1, a_1 \cdot b_2) = R_2 \in \mathbb{K}^{1 \times 2}.$$

Damit das System erreichbar ist, müssen R_1 und R_2 vollen Rang besitzen. Des Weiteren ist $(a_k, b_k)_2$ nur dann in der Nullfaser $\chi^{-1}(0)$ enthalten, wenn das charakteristische Polynom von F nur die Koeffizienten 0 besitzt. Daher muss $a_1 \cdot a_2 = 0$ gelten. Wir folgern hieraus, dass folgende Systeme als Vertreter für Elemente in $\chi^{-1}(0)$ in Frage kommen:

$$\left((0, 1), (1, 0) \right), \left((a_1, 1), (a_2, 1) \right), \left((1, 0), (0, 1) \right)$$

Hierbei wählen wir 1 als Eintrag, falls dieser nicht 0 sein darf, und a_i , falls er unter der Voraussetzung $a_1 \cdot a_2 = 0$ beliebig ist. Diese Bedingung ist in kartesischen Koordinaten a_1, a_2 grade das Koordinatenkreuz. Laut [1] kann man mit topologischen Mitteln zeigen, dass das Gebilde äquivalent zur „liegenden Acht“ in Bild 1 ist. Anschaulich geschieht dies durch Verknüpfung der „losen Enden“ der Koordinatenachsen.

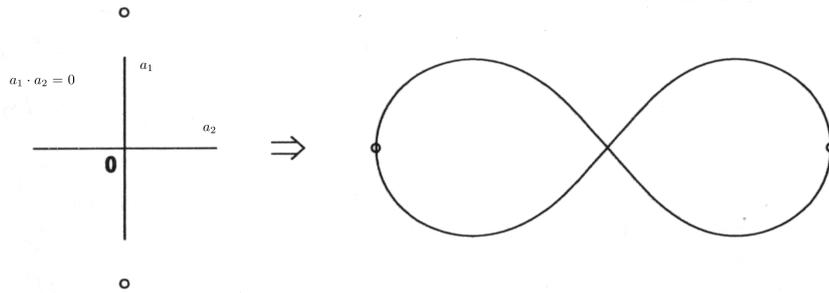


Abbildung 1: Nullfaser für $N = 2$, $n = m = 1$: „liegende Acht“, Quelle: [1]

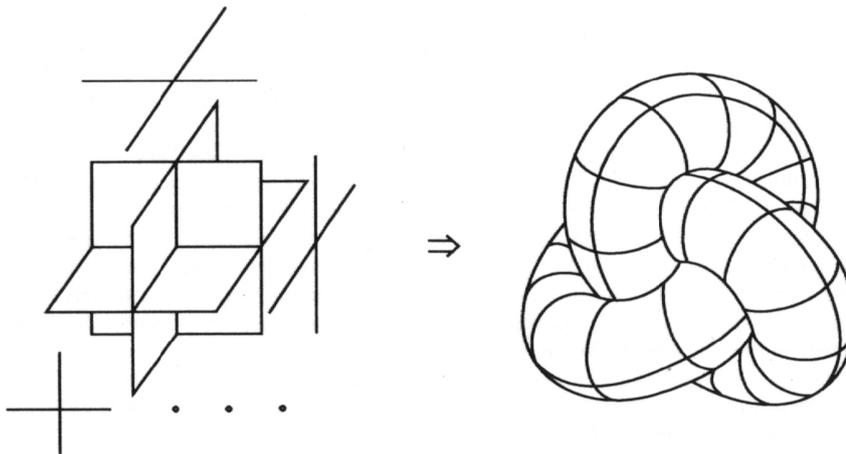


Abbildung 2: Nullfaser für $N = 3$, $n = m = 1$: „Dreipass“, Quelle: [1]

2. Sei $N = 3$, $n = m = 1$. Mit der selben Methode wie für den Fall $N = 2$, $n = m = 1$ können charakterisierende Gleichungen der Matrixeinträge aufgestellt werden. Dies führt laut [1] auf drei Gleichungen der Form „ $x \cdot y = 0$ “, sodass das geometrische Konstrukt zum „Dreipass“ aus Bild 2 topologisch äquivalent ist.

5 Normalform für erreichbare Systeme unter Ähnlichkeit

In diesem Kapitel geht es um die Klassifizierung der Elemente der in den letzten beiden Kapiteln untersuchten Menge $\mathcal{E}_N(\vec{n}, \vec{m})$. Der Ansatz ist die Unterteilung nach einer Normalform für erreichbare periodische System. Dazu sei \mathbb{K} ein beliebiger Körper.

Ein System sei gegeben durch

$$x_{k+1} = A_k \cdot x_k + b_k \cdot u_k$$

mit $k \in \mathbb{Z}$. Hierbei betrachten wir den vereinfachten Fall von Kapitel 2 mit

$$x_k \in \mathbb{K}^n, b_k \in \mathbb{K}^n, A_k \in \mathbb{K}^{n \times n} \text{ und } u_k \in \mathbb{K}.$$

Dieser Fall wird auch als „single-input-case“ bezeichnet (siehe [2]). Somit ist das System vollständig beschrieben durch

$$(A_j, b_j)_N := \left((A_1, b_1), \dots, (A_N, b_N) \right).$$

Wir untersuchen zunächst die Kalman-Matrix des zugehörigen zeitinvarianten Monodromie-Systems (F_j, G_j) zur Phase $j \in \overline{N}$, welche jetzt gegeben ist durch

$$R_j = (G_j, F_j \cdot G_j, \dots, F_j^{n-1} \cdot G_j) \in \mathbb{K}^{n \times (n \cdot N)}.$$

An dieser Stelle ist anzumerken, dass aufgrund der Vereinfachung $n_1 = \dots = n_N = n_{max} = n$ für die umfassende Kalman-Matrix des Monodromie-Systems $\overline{R}_j = R_j$ gilt.

Definition 26. Kronecker-Index

Sei $(A_k, b_k)_N$ erreichbar und R eine Kalman-Matrix des zugehörigen Monodromie-Systems (F, G) zu einer festen Phase mit

$$R = \left(G, F \cdot G, \dots, F^{n-1} \cdot G \right).$$

Laut Erreichbarkeitskriterium hat R vollen Zeilenrang n und die Spalten, gegeben durch die $n \cdot N$ Vektoren $F^i \cdot (G)_j$ mit $i \in \overline{n}$ und $j \in \overline{N}$, bilden ein Erzeugendensystem des \mathbb{K}^n . Hierbei bezeichne $(G)_j$ die j -te Spalte von G . Wir identifizieren die Spalten von R mit den Tupeln (i, j) .

Sei nun „ $<_{lex}$ “ die strikte lexikographische Ordnung auf \mathbb{N}_0^2 . Für $i < k \in \mathbb{N}_0$ sei $(i, j) <_{lex} (k, l)$ für alle $j, l \in \mathbb{N}_0$.

Damit ist eine Reihenfolge der Spalten festgelegt. Ist die zu (k, l) gehörige Spalte linear abhängig zu den vorherigen Spalten $(i, j) <_{lex} (k, l)$, so wird sie aus der Liste der Spalten entfernt.

Auf diese Weise erhält man nach Umsortierung eine Basis

$$\beta := \left((G)_1, \dots, F^{\kappa_1-1} \cdot (G)_1, \dots, (G)_N, \dots, F^{\kappa_N-1} \cdot (G)_N \right)$$

des Spaltenraums für geeignete $\kappa_j \in \mathbb{N}_0$.

Hierbei ist zu beachten, dass die Reihenfolge der Elemente von β nicht mit der Ordnung $<_{lex}$ übereinstimmt.

Das N -Tupel $\kappa := (\kappa_1, \dots, \kappa_N)$ wird als „Kronecker-Tupel“ von (F, G) bezeichnet. Die Einträge nennt man „Kronecker-Indizes“.

Bemerkung 27. Konstruktion und Darstellung

1. Das Verfahren zur Elimination von Spalten nach dem obigen Vorgehen wird als „Rosenbrock Verfahren“ bezeichnet.

2. Dass keine „Lücken“ zwischen $(G)_j$ und $F^{\kappa_j-1} \cdot (G)_j$ für $j \in \overline{N}$ liegen können, folgt aus folgender kurzen Überlegung.

Man betrachte $(G)_j, F \cdot (G)_j, F^2 \cdot (G)_j, \dots$. Dann existiert ein maximales $m \in \mathbb{N}$, sodass die Vektoren

$(G)_j, F \cdot (G)_j, F^2 \cdot (G)_j, \dots, F^{m-1} \cdot (G)_j$ linear unabhängig sind, und für $k \geq m$ sind

$(G)_j, F \cdot (G)_j, F^2 \cdot (G)_j, \dots, F^{m-1} \cdot (G)_j, F^k \cdot (G)_j$ linear abhängig.

Aufgrund der Wahl der Reihenfolge können somit keine „Lücken“ entstehen.

3. Da wir von einem erreichbaren System ausgegangen sind, hat die Kalman-Matrix R vollen Rang. Nach Konstruktion der Basis gilt daher

$$n = \text{rang}(R) = |\beta| = \sum_{j=1}^N \kappa_j.$$

4. In der Literatur werden Kronecker-Indizes häufig graphisch durch „Young Diagramme“ dargestellt. Mit der Notation wie oben ist ein Young Diagramm Y zu einem Kronecker-Tupel κ definiert über die Menge

$$Y(\kappa) := \{(j, i) \in \overline{N} \times \underline{n} \mid 0 \leq i \leq \kappa_j - 1\}.$$

Mit der bijektiven Vorschrift $\star : (j, i) \mapsto j + i \cdot N$ lässt sich Y als Diagramm darstellen.

5. Die Menge $Y(\kappa) \subseteq \overline{N} \times \underline{n}$ beziehungsweise die dazu mit \star bijektive Menge

$$J(\kappa) := \{j + i \cdot N \mid (j, i) \in Y(\kappa)\} \subseteq \overline{(n \cdot N)}$$

bestimmt die Basisvektoren β , wohingegen die linear abhängigen Spaltenvektoren von R gegeben sind durch das Komplement

$$D(\kappa) := \overline{(n \cdot N)} \setminus J(\kappa).$$

Beispiel 28. Wir betrachten als Beispiel $N = 4, n = 7$ und das Kronecker-Tupel $\kappa := (1, 3, 1, 2)$. Die Basis des Spaltenraums der zugehörigen Kalman-Matrix ist dann gegeben durch

$$\beta = \left((G)_1, (G)_2, F \cdot (G)_2, F^2 \cdot (G)_2, (G)_3, (G)_4, F \cdot (G)_4 \right)$$

und lässt sich beschreiben durch

$$Y(\kappa) = \{(1, 0), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (4, 0), (4, 1)\}$$

beziehungsweise

$$J(\kappa) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\}$$

mit

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & 6 & & 8 \\ & & 10 & \end{bmatrix}$$

als resultierendem Young-Diagramm. Entsprechend werden die linear abhängigen Vektoren beschrieben durch

$$D(\kappa) = \{5, 7, 9, 11, \dots, 28\}$$

Wir hatten die Kronecker-Indizes für eine Kalman-Matrix zu einer festen Phase des Monodromie-Systems definiert. Dies verallgemeinern wir nun auf alle Phasen.

Definition 29. *Kronecker-Matrix*

Es sei wieder das Monodromie-System (F_k, G_k) gegeben und $\kappa^{(k)} := (\kappa_1^{(k)}, \dots, \kappa_N^{(k)})$ das Kronecker-Tupel zur Kalman-Matrix bei Phase $i \in \overline{N}$. Wir definieren

$$Y_k := Y(\kappa^{(k)}), J_k := J(\kappa^{(k)}), D_k := D(\kappa^{(k)})$$

sowie die „Kronecker-Matrix“

$$K := \left((\kappa^{(1)})^T \mid \dots \mid (\kappa^{(N)})^T \right) \in \mathbb{N}_0^{N \times N}.$$

als die Matrix mit den transponierten Kronecker-Tupeln als Spaltenvektoren.

Wir haben in Kapitel 2 eine nützliche Strukturformel für die Kalman-Matrix aufgestellt und beim Beweis der Kalman-Zerlegung angewendet. Diese ermöglicht eine rekursive Darstellung der Spalten und kann auf die Position der linear abhängigen Spalten übertragen werden.

Lemma 30. Sei $k \in \overline{N}$ und $D_k^* := (D_k + 1) \cap \overline{(n \cdot N)}$. Dann gilt

1. $D_k^* \subseteq D_{k+1}$ und
2. $|D_{k+1} \setminus D_k^*| = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \kappa^{(k)} = (0, \dots, 0, n) = n \cdot e_N. \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$.

Beweis. Für die Kardinalität gilt $|D_k| = n \cdot N - n$, weil es genau $n \cdot N$ Spaltenvektoren und darunter laut dem Erreichbarkeitskriterium n linear unabhängige Vektoren gibt. Außerdem ist wegen $D_k \subseteq \overline{(n \cdot N)}$ die Kardinalität von D_k^* mindestens $n \cdot N - n - 1$.

Zum Beweis der beiden Beziehungen verwenden wir die Strukturformel aus Lemma 9, welche im vereinfachten Fall besagt, dass

$$(b_k, A_k \cdot R_k) = (R_{k+1}, F_{k+1}^n \cdot b_k)$$

ist. Demnach gilt für $1 \leq l \leq n \cdot N - 1$:

$$(A_k \cdot R_k)_l = (R_{k+1})_{l+1}$$

Für den Nachweis der Inklusion sei nun $l \in D_k^*$. Dann ist $l \in D_k + 1$, also existiert ein $\hat{l} \in D_k$ mit $l = \hat{l} + 1$. Der Spaltenvektor $(R_k)_{\hat{l}}$ ist demnach linear abhängig zu seinen Vorgängern $(R_k)_j$ mit $j < \hat{l} = l - 1$. Dann ist $(A_k \cdot R_k)_l = (R_{k+1})_l$ linear abhängig zu den Vektoren $(A_k \cdot R_k)_j = (R_{k+1})_{j+1}$. Also ist $l \in D_{k+1}$ und es folgt die Inklusion.

Nun sei $\kappa^{(k)} = n \cdot e_N$. Per Definition der Kronecker-Indizes ist eine Basis des Spaltenraums von R_k gegeben durch

$$\beta^{(k)} = \left((G_k)_N, \dots, F_k^{n-1} \cdot (G_k)_N \right)$$

und folglich

$$D_k = \{1, \dots, N - 1 \mid \dots \mid (n - 1) \cdot N + 1, \dots, n \cdot N - 1\}.$$

Durch eine Verschiebung nach rechts erhalten wir

$$D_k^* = \{2, \dots, N, \dots, (n - 1) \cdot N + 2, \dots, n \cdot N\},$$

also ist $|D_k^*| = n \cdot N - N$ und wegen $|D_{k+1}| = n \cdot N - N$ sowie der bereits gezeigten Inklusion folgt Gleichheit.

Für den Fall $D_{k+1} = D_k^* = (D_k+1) \cap \overline{(n \cdot N)}$ folgt aufgrund der Kardinalität $|D_{k+1}| = (D_k+1) \cap \overline{(n \cdot N)}$. Also ist $n \cdot N \notin D_k$. Insbesondere ist der Vektor $F_k^{n-1} \cdot (G_k)_N$ nicht linear abhängig von allen anderen Spaltenvektoren von R_k und für den entsprechenden Kronecker-Index gilt $\kappa_N^{(k)} = n$. Das Kronecker-Tupel $\kappa^{(k)}$ ist somit gegeben durch $n \cdot e_N$.

Es bleibt zu zeigen, dass $D_{k+1} \setminus D_k^*$ höchstens einelementig ist. Dies folgt jedoch aus der Vorüberlegung und der Inklusion mit

$$n \cdot N - n - 1 \leq |D_k^*| \leq |D_{k+1}| = n \cdot N - n.$$

Somit folgt die zweite Aussage. □

Definition 31. *Pivot*

Sei $j \in \overline{N}$ und $D_{j+1} \setminus D_j^* = \{i_j^*\}$. Dann bezeichnen wir das Element $i_j^* \in \overline{(n \cdot N)}$ als „ j -te Pivot-Position“. Wir nennen

$$i_j := i_j^* \pmod{N} \in \overline{N}$$

den „ j -ten Pivot-Index“. Falls $D_{j+1} = D_j^*$ ist, so setzen wir $i_j = 1$. Dann ist die Matrix

$$P := (e_{i_1} | \dots | e_{i_N}) \in \mathbb{N}_0^{N \times N}$$

wohldefiniert und heißt „Pivot-Matrix“.

Bemerkung 32. *Invarianten unter Ähnlichkeit*

- Das Kronecker-Tupel eines erreichbaren periodischen Systems ist invariant unter Ähnlichkeitstransformationen des Zustandsraums. Insbesondere gilt dies auch für die Kronecker-Matrix und die Pivot-Matrix. Dies resultiert aus der folgenden Rechnung.

Seien $S_1, \dots, S_N \in \text{Gl}_n(\mathbb{K})$ invertierbare Matrizen und $(\hat{A}_k, \hat{b}_k)_N := (S_{k+1} \cdot A_k \cdot S_k^{-1}, S_{k+1} \cdot b_k)_N$, wobei wieder $S_0 := S_N$ und $S_{N+1} := S_1$ gelte. Dann gilt für das entsprechende Monodromie-System zur Phase k per Einsetzen in die Definition

$$(\hat{F}_k, \hat{G}_k)_N = (S_{k+N} \cdot F_k \cdot S_k^{-1}, S_k \cdot G_k)_N = (S_k \cdot F_k \cdot S_k^{-1}, S_k \cdot G_k)_N$$

und somit für die Kalman-Matrix des Monodromie-Systems

$$\hat{R}_k = (S_k \cdot G_k, \dots, S_k \cdot F_k^{n-1} \cdot G_k) = S_k \cdot R_k.$$

Da Linksmultiplikation mit invertierbaren Matrizen zu Zeilentransformation führt und somit die Position der linear unabhängigen Spalten nicht ändert, besitzen die beiden Systeme identische Kronecker-Matrizen.

- Die Pivot-Position existiert für den Fall $D_{j+1} \neq D_j^*$ nach Lemma 30 und ist eindeutig. Da D_j^* per Definition nicht 1 enthalten kann, ist die Konvention $i_j = 1$ im Falle der Gleichheit geeignet und kann für das nächste Lemma genutzt werden.

Lemma 33. *Rekursive Darstellung der Kronecker-Tupel*

Sei $L := (e_2 | \cdots | e_N | e_1)$. Für $j \in \overline{N}$ gilt dann

$$\kappa^{(j+1)} = L \cdot \kappa^{(j)} + e_1 - e_{i_j}$$

wobei $\kappa^{(N+1)} = \kappa^{(1)}$.

Beweis. Für den Fall $D_{j+1} = D_j^*$ folgt laut Konvention $e_1 - e_{i_j} = e_1 - e_1 = 0$. Es bleibt also die Beziehung $\kappa^{(j+1)} = L \cdot \kappa^{(j)}$ zu zeigen. Wir verwenden Lemma 30 sowie die Tatsache, dass sich D_j und D_{j+1} bis auf die Pivot-Position nur um eine Verschiebung um 1 unterscheiden. Dann gilt für $l \in \overline{N}$

$$\kappa_l^{(j+1)} = \kappa_{l-1}^{(j)} + \delta_{l,1} - \delta_{l,i_j}.$$

und es ist alles gezeigt. □

Beispiel 34. Sei $N = 3$ und $n = 6$. Wir betrachten die Positionen der linear abhängigen und unabhängigen Spaltenvektoren von $R_j \in \mathbb{K}^{6 \times 18}$ für ein $j \in \{1, 2, 3\}$, welche in der folgenden Tabelle gegeben sind.

linear unabhängig :	1	2	3	4	5	7			
linear abhängig :						6	8	...	18

Per Definition sind dann die Menge der linear abhängigen Vektoren und das Kronecker-Tupel gegeben durch

$$D_j = \{6, 8, \dots, 18\} \quad \text{und} \quad \kappa_j = (3, 2, 1)^T.$$

Aus Lemma 30 folgt

$$D_{j+1} = \{7, 9, \dots, 18\} \cup \{i_j^*\} \quad \text{und} \quad J_{j+1} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\} \setminus \{i_j^*\}.$$

Daher kommen nur drei Fälle für die Pivot-Position in Frage.

- $i_j^* = 4 \Rightarrow \kappa^{(j+1)} = (1, 3, 2)^T$ und $i_j = 1$

Dann gilt

$$\kappa^{(j+1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + e_1 - e_1 = L \cdot \kappa^{(j)} + e_1 - e_{i_j}$$

- $i_j^* = 6 \Rightarrow \kappa^{(j+1)} = (2, 3, 1)^T$ und $i_j = 0$

Dann gilt (mit $e_0 := e_3$):

$$\kappa^{(j+1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + e_1 - e_3 = L \cdot \kappa^{(j)} + e_1 - e_{i_j}$$

- $i_j^* = 8 \Rightarrow \kappa^{(j+1)} = (2, 2, 2)^T$ und $i_j = 2$

Dann gilt

$$\kappa^{(j+1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + e_1 - e_2 = L \cdot \kappa^{(j)} + e_1 - e_{i_j}$$

Aus dieser rekursiven Darstellung erhalten wir das Korollar 35 über die Pivot-Indizes.

Korollar 35. Die N Werte $i_k + N - k \in \bar{N}$ sind für $k \in \bar{N}$ paarweise verschieden.

Beweis. Wir wenden Lemma 33 auf $\kappa^{(N+1)}$ an:

$$\begin{aligned}\kappa^{(N+1)} &= L \cdot \kappa^{(N)} + e_1 - e_{i_N} \\ &= L^2 \cdot \kappa^{(N-1)} + e_1 + L \cdot e_1 - (e_{i_N} + L \cdot e_{i_{N-1}}) \\ &= \dots \\ &= L^N \cdot \kappa^{(1)} + \sum_{k=0}^{N-1} L^k \cdot e_1 - \sum_{k=0}^{N-1} L^k \cdot e_{i_{N-k}}\end{aligned}$$

Es gilt $\kappa^{(N+1)} = \kappa^{(1)}$. Durch Betrachtung der Potenzen der Matrix L

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad L^N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

wird klar, dass $L^N = E_N$ und $L^k \cdot e_l = e_{k+l}$ für $k \in \underline{N}$, $l \in \bar{N}$ gilt. Insgesamt folgt

$$\kappa^{(1)} = \kappa^{(1)} + \sum_{k \in \underline{N}} L^k \cdot e_1 - \sum_{k \in \underline{N}} L^k \cdot e_{i_{N-k}},$$

also ist

$$e := (1, \dots, 1)^T = \sum_{k \in \underline{N}} L^k \cdot e_1 = \sum_{k \in \underline{N}} L^k \cdot e_{i_{N-k}} = \sum_{k \in \underline{N}} e_{i_{N-k}+k} = \sum_{k \in \underline{N}} e_{i_k+N-k}.$$

Hier wird die Konvention $e_0 := e_N$ und $e_{N+1} := e_1$ verwendet. Somit kommt unter den N Vektoren e_{i_k+N-k} jeder Standardbasisvektor des \mathbb{K}^n genau einmal vor und die natürlichen Zahlen $i_k + N - k$ sind für $k \in \bar{N}$ paarweise verschieden. □

Bemerkung 36. Hieraus folgt nicht, dass die Pivot-Indizes paarweise verschieden sein müssen. Betrachten wir beispielsweise $N = 2$ und $i_1 - 1 \bmod 2 = 1$, so folgt $i_1 = 2$ und laut Korollar 35 muss $i_2 - 2 \bmod 2 = 2$ sein, also ist $i_1 = i_2$.

Der folgende Satz ist eine Aussage über die Existenz einer Normalform für erreichbare, periodische Systeme. Wie wir in Bemerkung 6. anhand eines Gegenbeispiels gesehen haben, ist die Existenz eines solchen Systems für beliebig große Matrizen A_k , B_k und beliebige Periodendauer N keineswegs gesichert. Die Einschränkung auf quadratische Matrizen A_k und Spaltenvektoren b_k ist ein hinreichendes Kriterium für die folgenden Resultate. Für die Wahl

$$A_k = (e_2, \dots, e_n, e_1) \quad \text{und} \quad b_k = e_1$$

hat nämlich die Kalman-Matrix des Systems $(A_k, b_k)_N$ für jede Phase $k \in \mathbb{Z}$ die Gestalt

$$R^\infty = (E_n, \dots)$$

und somit vollen Zeilenrang. Damit ist die Menge der erreichbaren Systeme nicht leer.

Satz 37. *Normalform für erreichbare Systeme*

Sei $(A_k, b_k)_N$ erreichbar mit Kronecker-Tupeln $\kappa^{(1)}, \dots, \kappa^{(N)}$ und Pivot-Indizes i_1, \dots, i_N der zugehörigen Monodromie-Systeme. Dann existieren

- invertierbare Matrizen $S_1, \dots, S_N \in \text{Gl}_n(\mathbb{K})$,
- „Struktur-Indizes“ $\nu_1, \dots, \nu_N \in \mathbb{N}$ und
- Koeffizienten $a_i^{(k)} \in \mathbb{K}$ mit $i \in \mathbb{N}$ und $k \in \overline{N}$,

sodass

$$\hat{A}_k := S_{k+1} \cdot A_k \cdot S_k^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_0^{(k)} & & \\ 1 & & 0 & a_1^{(k)} & & \\ & & \ddots & \vdots & & \\ 0 & & 1 & a_{\nu_k-1}^{(k)} & & 0 \\ & & & 0 & & \\ & & & & & E_{n-\nu_k} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

und

$$\hat{b}_k := S_{k+1} \cdot b_k = \begin{cases} 0, & \text{wenn } b_k = 0 \\ e_1, & \text{sonst} \end{cases} \in \mathbb{K}^n$$

ein zu $(A_k, b_k)_N$ ähnliches, erreichbares, N -periodisches System $(\hat{A}_k, \hat{b}_k)_N$ bilden.

Beweis. Wir zeigen die Aussage zunächst für den Fall $N = 1$ (siehe [2]). Dann gibt es nur ein Monodromie-System mit Kalman-Matrix

$$R := (b \mid A \cdot b \mid \dots \mid A^{n-1} \cdot b) \in \mathbb{K}^{n \times n},$$

welche vollen Rang hat, und somit invertierbar ist. Außerdem sei das charakteristische Polynom von A gegeben durch

$$\chi_A(\lambda) := \lambda^n - \sum_{l=0}^{n-1} a_l \cdot \lambda^l.$$

Dann besitzt A^n nach Cayley-Hamilton die Darstellung

$$A^n = \sum_{l=0}^{n-1} a_l \cdot A^l$$

für geeignete Koeffizienten $a_l \in \mathbb{K}$ und es gilt

$$A \cdot R = (A \cdot b \mid \dots \mid A^n \cdot b) = (b \mid A \cdot b \mid \dots \mid A^{n-1} \cdot b) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & & 0 & a_1 \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} = R \cdot \hat{A}$$

sowie

$$b = (b \mid A \cdot b \mid \dots \mid A^{n-1} \cdot b) \cdot e_1 = R \cdot \hat{b}.$$

Mit $S_1 = R^{-1}$ und Strukturindex $\nu_1 = n$ folgt die Behauptung für $N = 1$.

Kommen wir nun zum allgemeinen Fall $N \geq 1$. Sei $k \in \overline{N}$ fest. Wir wenden den Satz von Cayley-Hamilton auf die quadratische Mondromie-Matrix F_k an und erhalten

$$F_k^n + a_{n-1}^{(k)} \cdot F_k^{n-1} + \dots + a_{\nu_k}^{(k)} \cdot F_k^{\nu_k} = a_{\nu_k-1}^{(k)} \cdot F_k^{\nu_k-1} + \dots + a_1^{(k)} \cdot F_k + a_0^{(k)} \cdot E_n$$

mit geeigneten Koeffizienten $a_i^{(k)} \in \mathbb{K}$. Zur Kalman-Matrix R_k des Monodromie-Systems (F_k, G_k) definieren wir, wie bei der Konstruktion der Kronecker-Indizes, eine Basis des Spaltenraums $\beta_k := (u_l^{(k)})_{l \in \overline{n}}$ aus den Spaltenvektoren und fassen diese als Matrix

$$\begin{aligned} S_k^{-1} &:= \left(u_1^{(k)} \mid \dots \mid u_n^{(k)} \right) \\ &= \left((G_k)_1 \mid \dots \mid F_k^{\kappa_1^{(k)}-1} \cdot (G_k)_1 \mid \dots \mid (G_k)_N \mid \dots \mid F_k^{\kappa_N^{(k)}-1} \cdot (G_k)_N \right) \end{aligned}$$

auf. Dann gilt wegen $(G_k)_1 = b_k$ direkt

$$b_k = S_k^{-1} \cdot e_1 \quad \text{genau dann, wenn} \quad S_k \cdot b_k = e_1 = \hat{b}_k$$

gilt. Wählen wir nun ν_k so, dass

$$u_{\nu_k}^{(k)} = F_k^{\kappa_{i_k}^{(k+1)}-1} \cdot (G_k)_{i_k}$$

der Position des Basisvektors bezüglich des Pivot-Index i_k und Kronecker-Index $\kappa_{i_k}^{(k+1)}$ entspricht, erhalten wir mit Lemma 33

$$A_k \cdot u_l^{(k)} = \begin{cases} u_{l+1}^{(k+1)}, & \text{für } l < \nu_k \\ \sum_{i=1}^{\nu_k} a_{i-1}^{(k)} \cdot u_i^{(k+1)}, & \text{für } l = \nu_k \\ u_l^{(k+1)}, & \text{für } l > \nu_k \end{cases}$$

und in Matrixdarstellung

$$A_k \cdot S_k^{-1} = S_{k+1}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_0^{(k)} & & \\ 1 & & 0 & a_1^{(k)} & & \\ & & \ddots & \vdots & & \\ 0 & & 1 & a_{\nu_k-1}^{(k)} & & 0 \\ & & 0 & & & E_{n-\nu_k} \end{pmatrix} = S_{k+1}^{-1} \cdot \hat{A}_k.$$

Damit bilden die Matrizen S_k eine Transformation des Zustandsraums von $(A_k, b_k)_N$ in die Normalform $(\hat{A}_k, \hat{B}_k)_N$. \square

Bemerkung 38.

- Der Beweis ist konstruktiv, ähnlich wie der Beweis zur Kalman-Zerlegung. Für gegebene Kalman-Matrizen der Monodromie-Systeme lassen sich die geeigneten Basisvektoren mit dem Rosenbrock-Verfahren aus Definition 26 herleiten. schreibt man die Basisvektoren als Matrix, so ergibt sich gerade die N -periodische Transformation des Zustandsraums
- Da die Monodromie-Matrizen von zwei Systemen, die durch Transformationen ineinander überführt werden können, tatsächlich ähnlich sind und sich die Normalform aus den Koeffizienten des charakteristischen Polynoms besteht, ist die erreichbare Normalform eine Invariante unter Ähnlichkeitstransformationen.
- In der vorliegenden Darstellung ist die erreichbare Normalform eine Verallgemeinerung der „controllability form“, welche in [2] eingeführt wird. Der Beweis ist der obige Fall $N = 1$.
- Die Parameter $a_i^{(k)}$ in der Matrix \hat{A}_k hängen von A_k ab. Insbesondere folgt aus der Normalform, dass \hat{A}_k und A_k denselben Rang haben, nämlich $n - 1$ für $a_0^{(k)} = 0$ und sonst n . Die Anzahl dieser Parameter entspricht gerade der Summe der Strukturindizes.
- Wegen $S_{k+1} \cdot A_k = \hat{A}_k \cdot S_k$ haben Bild und Kern von A_k und \hat{A}_k jeweils die gleiche Dimension. Daher ist

$$\dim(\text{Bild}(A_k)) \geq n - 1 \quad \text{und} \quad \dim(\text{Kern}(A_k)) \leq 1.$$

6 Ausblick und Fazit

Die Erreichbare Normalform ist ein geeigneter Vertreter für ein Element aus $\mathcal{E}_N(\vec{\pi}, \vec{m})$. Weil wir Systeme mit eindimensionalen Inputs betrachten gilt hier

$$\vec{\pi} = (n, \dots, n) \quad \text{und} \quad \vec{m} = (1, \dots, 1).$$

Daher bezeichnen wir das Vertretersystem ab sofort mit $\mathcal{E}_N(n)$. Die Elemente sind grade die Bahnen der erreichbaren, periodischen Systeme unter der Gruppenoperation σ . Wir definieren für $\nu := (\nu_1, \dots, \nu_N)$ die „Zelle“

$$\mathcal{Z}(\nu) := \left\{ \left[(A_k, b_k)_N \right]_{\sigma} \in \mathcal{E}_N(n) \mid \forall x \in \left[(A_k, b_k)_N \right]_{\sigma} \text{ gilt :} \right. \\ \left. x \text{ besitzt die Struktur-Indizes } \nu_1, \dots, \nu_N \right\}.$$

Ähnliche Systeme besitzen offenbar dieselbe Normalform. Daher besitzen sie auch dieselben Struktur-Indizes. Daraus folgt jedoch nicht, dass nicht-ähnliche Systeme verschiedene Struktur-Indizes haben. Es ist durchaus möglich, dass sich die Normalformen in den Koeffizienten $a_i^{(k)} \in \mathbb{K}$ aus Satz 37 aber nicht in der Größe der Blöcke unterscheiden. Daher ist diese Einteilung der Elemente von $\mathcal{E}_N(n)$ gröber, als nach Bahnen zu unterscheiden. Andererseits bietet sie die Vorteile einer endlichen, disjunkten Zerlegung, weil die Strukturindizes durch n beschränkte, natürliche Zahlen sind.

Definition 39. Sei F ein topologischer Raum und I eine endliche Indexmenge. Ferner gebe es $\mathcal{Z}_i \in \mathfrak{P}(F)$, $i \in I$, mit

$$F = \bigcup_{i \in I} \mathcal{Z}_i \quad \text{und} \quad \mathcal{Z}_i \cap \mathcal{Z}_j = \emptyset, \text{ falls } i \neq j.$$

Diese disjunkte, endliche Zerlegung von F heißt „Cellular-patch-complex“, falls

$$j < i \Rightarrow \mathcal{Z}_i \cap \overline{\mathcal{Z}_j} = \emptyset$$

für alle $i, j \in I$ gilt, wobei $\overline{\mathcal{Z}_j}$ den topologischen Abschluss von \mathcal{Z}_j in F und „ \leq “ eine Totalordnung auf I bezeichnet. Die „Cellular-patches“ \mathcal{Z}_i bezeichnen wir als „Zellen“.

Die Zerlegung von $\mathcal{E}_N(n)$ in Zellen $\mathcal{Z}(\nu)$ ist ein Cellular-patch-complex. Die Dimension einer Zelle ist gegeben durch

$$\dim(\mathcal{Z}(\nu)) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \mathcal{Z}(\nu_1, \dots, \nu_N) = \emptyset \\ \nu_1 + \dots + \nu_N, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Die Beweisidee besteht darin, eine Reihenfolge der Strukturindizes festzulegen, die auf den Kronecker-Indizes beruht.

Sei $\mathcal{Z}(\nu) \neq \emptyset$. Die Anzahl der Koeffizienten, welche in der Normalform auftreten, ist ν_k pro Matrix \hat{A}_k . Insgesamt gibt es pro System daher $\nu_1 + \dots + \nu_N$ freie Parameter, also ist dies auch die Dimension. Seien nun $\nu, \mu \in \mathbb{N}^N$ mit $\mathcal{Z}_{\nu} \cap \overline{\mathcal{Z}_{\mu}} \neq \emptyset$. Aus der Konstruktion der Strukturindizes folgt, dass alle Elemente der Bahnen in \mathcal{Z}_{ν} dieselben Kronecker-Indizes besitzen. Wir definieren $\kappa_{\nu}, \kappa_{\mu} \in \mathbb{N}^N$ als Kronecker-Tupel der jeweiligen Zellen. Laut [1] kann man beweisen, dass aus $\mathcal{Z}_{\nu} \cap \overline{\mathcal{Z}_{\mu}} \neq \emptyset$ bereits folgt, dass $m_{i,j}(\kappa_{\nu}) \leq m_{i,j}(\kappa_{\mu})$ für alle $(i, j) \in \underline{n} \times \overline{N}$ gilt. Hierbei ist

$$m_{i,j}(\kappa) := \left| \left\{ (k, l) \leq_{lex} (i, j) \text{ mit } k \in \underline{\kappa_l} \right\} \right|.$$

Damit ist eine geeignete Ordnung der Kronecker-Indizes und somit für die Strukturindizes gegeben.

Die Idee eines Cellular-patch-complexes besteht darin, Betti-Zahlen für $\mathcal{E}_N(n)$ mit Zellen $\mathcal{Z}(\nu)$ zu generieren. Betti Zahlen sind als Dimensionen von Homologiegruppen topologische Invarianten. Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sind die Betti-Zahlen von $\mathcal{E}_N(n)$ laut [1] gegeben durch

$$b_d(n, N) := \left| \left\{ \emptyset \neq \mathcal{Z}(\nu) \subseteq \mathcal{E}_N(n) \mid \nu \in \mathbb{N}_0^N \text{ mit } \nu_1 + \dots + \nu_N = d \right\} \right|.$$

Dann gilt

$$H_d(\mathcal{E}_N(n), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{b_d(n, N)}$$

für die Homologie-Gruppe von $\mathcal{E}_N(n)$ über \mathbb{Z} . Des Weiteren ist für $n = 1$

$$b_d(1, N) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } d \text{ ungerade ist} \\ \binom{N}{\hat{d}}, & \text{wenn } d = 2 \cdot \hat{d} \text{ ist} \end{cases}.$$

Hierbei bezeichnet

$$\binom{N}{\hat{d}} = \frac{N!}{\hat{d}! \cdot (N - \hat{d})!}$$

den Binomialkoeffizienten. Ist N ungerade, so gilt im Allgemeinen nicht die Symmetriebedingung

$$b_d(1, N) = b_{N-d}(1, N).$$

Dies ist aber eine Voraussetzung für die Einbettung von $\mathcal{E}_N(1)$ in eine glatte kompakte Mannigfaltigkeit. Figur 2 aus Kapitel 4 ist ein Beispiel für nicht-symmetrische Betti-Zahlen.

Fazit

Die Definition des Erreichbarkeitsbegriffs für periodische Systeme der allgemeinen Form aus Kapitel 2 erfordert eine geeignete Wahl von assoziierten, zeitinvarianten Systemen und Transformationen des Zustandsraums. Dadurch gelingt es Charakterisierungen der Erreichbarkeit zu finden, zum Einen mit eben diesen zeitinvarianten Systemen, zum Anderen mit der Dimension der Stabilisatorgruppe. In den Beweisen haben wir jedoch immer das Monodromie-System oder das erweiterte System verwendet. Sowohl die Kalman-Zerlegung als auch die Normalform für erreichbare Systeme gehen auf die Kalman-Matrizen der zeitinvarianten Systeme zurück. Mit Mitteln der Topologie und Funktionalanalysis konnten außerdem geometrische Eigenschaften nachgewiesen und Vertreter von periodischen Systemen als Elemente analytischer Objekte aufgefasst werden. Damit haben wir grundlegende Eigenschaften aus der Kontrolltheorie auf den allgemeineren Fall $N > 1$ übertragen. Um die Arbeit von Helmke und Verriest aus Quelle [1] fortzusetzen, können die Begriffe Feedback-Kontrolle und Beobachtbarkeit, die in Quelle [2] eingeführt werden, auf N -periodische Systeme erweitert werden.

Literatur

- [1] Uwe Helmke, Erik I. Verriest: *Structure and parametrization of periodic linear systems*, Auszug aus *Math. Control Signals Syst.*, Springer, 2011
- [2] Eva Zerz: *Introduction to Systems and Control Theory*, RWTH Aachen
- [3] Hans Wilhelm Alt: *Lineare Funktionalanalysis*, Springer, 2002
- [4] Wolfgang Walter: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Springer, 2000
- [5] Allen Tannenbaum: *On the Stabilizer Group of a Pair of Matrices*, Elsevier Science Publishing Co.,Inc., 1983
- [6] Website von Uwe Helmke der Universität Würzburg: www.mathematik.uni-wuerzburg.de/personal/helmke
- [7] Website von Erik I. Verriest der Gerogia Tech: www.ece.gatech.edu/faculty-staff-directory/erik-i-verriest